<u>בחינת גמר – דוגמא – מתכונת חדשה</u>

<u>מתמטיקה למוסמך במינהל עסקים - 91415</u>

סמסטר 2021ב ואילך

<u>**תשובות**</u>

<u>**שאלה 1**</u>

א. (1) אין פתרון.אס"ם $\lambda=-2$

(2) יש אינסוף פתרונות אס"ם $\lambda=2$

(3) יש פתרון יחיד אס"ם $\lambda\neq-2$ וגם $\lambda\neq 2$

ב. הפתרון הכללי המתקבל הוא $(x,y,z)=(-1-t,\quad \frac{-1}{2}t,\quad t)$

יש לפרט את שלבי החישובים ולנמק את הקביעות.

<u>**שאלה 2**</u>

א. $A^{-1}=\begin{pmatrix}-5 & -7 & 4\\ -3 & -5 & 2\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

ב. $X=BA^{-1}=\begin{pmatrix}-8 & -14 & 8\\ 10 & 16 & -8\\ -10 & -18 & 12\end{pmatrix}$.

ג. קיימת מטריצה Y כזאת. $\det B=4$ ולכן B הפיכה,

וניתן לחשב את Y ע"י $Y=B^{-1}A$ (אין צורך בתשובה לרשום במפורש את רכיבי Y).

בסעיפים א' ו-ב' יש לוודא את נכונות התשובות כנדרש בשאלה.

<u>**שאלה 3**</u>

ע"י הצבת הדטרמיננטות בכלל קרמר: $x=\frac{-19}{3}=\boxed{-6\frac{1}{3}},\quad y=\boxed{-\frac{1}{3}},\quad z=\frac{-12}{3}=\boxed{-4}$

יש לבדוק את הפתרון ע"י הצבתו במערכת המשוואות.

שאלה 4

$$f(t)=t^4-4t^3+15 \quad , \quad f'(t)=4t^3-12t^2=4t^2(t-3) \quad , \quad f''(t)=12t^2-24t=12t(t-2)$$

הפונקציה יורדת בתחום $(-1,3)$ ועולה בתחום $(3,4)$.

הפונקציה קמורה בתחום $(-1,0)$, קעורה בתחום $(0,2)$ וקמורה בתחום $(2,4)$.

$(-1,20)$ נקודת קצה שהיא נקודת מקסימום מוחלט, $(0,15)$ נקודת פיתול, $(2,-1)$ נקודת פיתול, $(3,-12)$ נקודת מינימום מקומי ומוחלט ו- $(4,15)$ נקודת קצה שהיא לא מקסימום מוחלט ולא מינימום מוחלט.

יש לשרטט גרף שמתאים לממצאים הללו.

שאלה 5

תנאים מסדר ראשון:
$$\begin{cases}\pi_1(Q_1,Q_2)=-6Q_1-2Q_2+12=0\\ \pi_2(Q_1,Q_2)=-2Q_1-6Q_2+20=0\end{cases} \Rightarrow\dots\Rightarrow \begin{matrix}Q_1=1\\ Q_2=3\end{matrix}$$

כלומר, קיימת נקודה אחת חשודה כקריטית והיא ב- $(Q_1,Q_2)=(1,3)$

תנאים מסדר שני:
$$\begin{cases}\pi_{11}=-6=\ A\ <0\\ \pi_{12}=\ \ -2=\ B\\ \pi_{22}=-6=\ C\end{cases} \qquad \begin{matrix}D=AC-B^2=32>0\\ A,C<0\end{matrix} \quad \Rightarrow \quad Max.$$

כיוון שמדובר בנקודה קריטית יחידה, הרי שהיא **המוחלטת** מסוגה, ולכן:

$$Max\ \pi(Q_1,Q_2)=\pi(1,3)=\dots=36$$

שאלה 6

א. משוואת האילוץ היא $g(x,y)=x+y-56=0$.

$L(x,y,\lambda)=TC(x,y)-\lambda\cdot g(x,y)=4x^2+3xy+6y^2+56-\lambda(x+y-56)$.

תנאים מסדר I:
$$\begin{cases}L_1=8x+3y-\lambda=0\\ L_2=3x+12y-\lambda=0\\ L_3=-x-y+56=0\end{cases} \Rightarrow \quad x=36,\quad y=20,\quad (\lambda=348).$$

ב. תנאים מסדר II: השתמשו בנגזרות מסדר שני של פונקציות המטרה והאילוץ, והציבו אותן בנוסחה שבעוד 96 בספר.כדי להראות שמתקבל ערך חיובי $D=14>0$ ולכן מדובר על פתרון בעיית מינימום תחת האילוץ. כלומר:
$$\underset{s.t.\ x+y-56=0}{Min}\ TC(x,y)=TC(36,20)=9{,}800$$

כלומר, הערך המזערי תחת האילוץ יהיה 9,800 ויתקבל עבור $x=36$ ו- $y=20$.

שאלה 7

א. $$\int_{6}^{12} te^{-t/10}dt = (-10te^{-t/10})\Big|_{6}^{12} + \int_{6}^{12} 10e^{-t/10}dt = (-10te^{-t/10} - 100e^{-t/10})\Big|_{6}^{12} =$$

$$= 10e^{-t/10}(t+10)\Big|_{12}^{6} = 160e^{-0.6} - 220e^{-1.2} = \boxed{21.5471...}$$

ב. $$f(x) = \int \frac{2x}{\sqrt{9+x^2}}dx \quad = ..(substitution \quad 9+x^2 = t).. = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{9+x^2} + C$$

$f(4) = 5 \quad \Rightarrow \quad C = -5$ ולכן: $\boxed{f(x) \quad = \quad 2\sqrt{9+x^2} - 5}$.

שאלה 8

א. $P'(t) + 0.2P(t) = 4$

ב. $P(t) = 20 - 4e^{-0.2t}$

ד. בשרטוט יש להראות שהפונקציה היא עולה מהנקודה $(0,16)$, קעורה ומתקרבת אסימפטוטית ל- $P = 20$.