

פתרון מבחן לדוגמה

שאלה 1

מפעל מייצר Q מחשבים בחודש (בעשרות אלפים).

העלות החודשית הכוללת של הייצור (בעשרות אלפי שקלים) כתלות בכמות התוצר נתונה על ידי הפונקציה: $TC(Q) = 16 + 2Q$.

ההכנסה החודשית (בעשרות אלפי שקלים) כתלות בכמות התוצר הנמכר, נתונה על ידי הפונקציה: $TR(Q) = 14Q - 2Q^2$.

שימו לב, כי פונקציית ההכנסה לא יכולה להיות שלילית.

סעיף א' (10 נק'):

סרטוט, באופן סכמטי בלבד, את שתי הפונקציות על מערכת צירים אחת.

פרטו את נקודות החיתוך של הפונקציות עם הצירים (אם ישנן), נקודות החיתוך בין שתי הפונקציות (אם ישנן)

ואת הקודקודים (אם ישנם). שימו לב לתחום ההגדרה.

פתרון סעיף א':

מכיוון שמדובר בכמות תוצר, נדרוש ש- $Q \geq 0$ וזהו תחום ההגדרה לשתי הפונקציות.

$TC(Q)$:

$$TC(0) = 16 + 2 \cdot 0 = 16 \implies (0, 16)$$

נקודת החיתוך עם ציר ה- $TC(Q)$ (ציר ה- y) היא $(0, 16)$.

$$0 = 16 + 2 \cdot Q \implies 2Q = -16 \implies Q = -8$$

נקודת החיתוך עם ציר ה- Q (ציר ה- x) היא $(-8, 0)$. מכיוון שתחום ההגדרה הוא $Q \geq 0$ אז נקודה זו לא רלוונטית.

$TR(Q)$:

$$TR(0) = 14 \cdot 0 - 2 \cdot 0^2 = 0 \implies (0, 0)$$

נקודת החיתוך עם ציר ה- $TC(Q)$ (ציר ה- y) היא $(0, 0)$.

$$0 = 14Q - 2Q^2 \implies 0 = 2Q(7 - Q) \implies Q = 0, 7$$

נקודות החיתוך עם ציר ה- Q (ציר ה- x) הן $(0, 0)$, $(7, 0)$.

קודקוד $TR(Q)$ שווה ל:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{14}{2 \cdot (-2)} = \frac{14}{4} = 3.5$$

$$y_v = TR(3.5) = 14 \cdot 3.5 - 2 \cdot 3.5^2 = 24.5$$

אם כן, הקודקוד של הפרבולה הבוכה (כי $a = -2 < 0$) הוא $(3.5, 24.5)$.
 כאמור $TR(Q)$ היא פרבולה בוכה. לפי הנתון בשאלה פונקציית ההכנסה לא יכולה להיות שלילית ולכן,
 כדי שהפונקציה לא תהיה שלילית יש לדרוש כי $0 \leq Q \leq 7$.

$:TR(Q), TC(Q)$

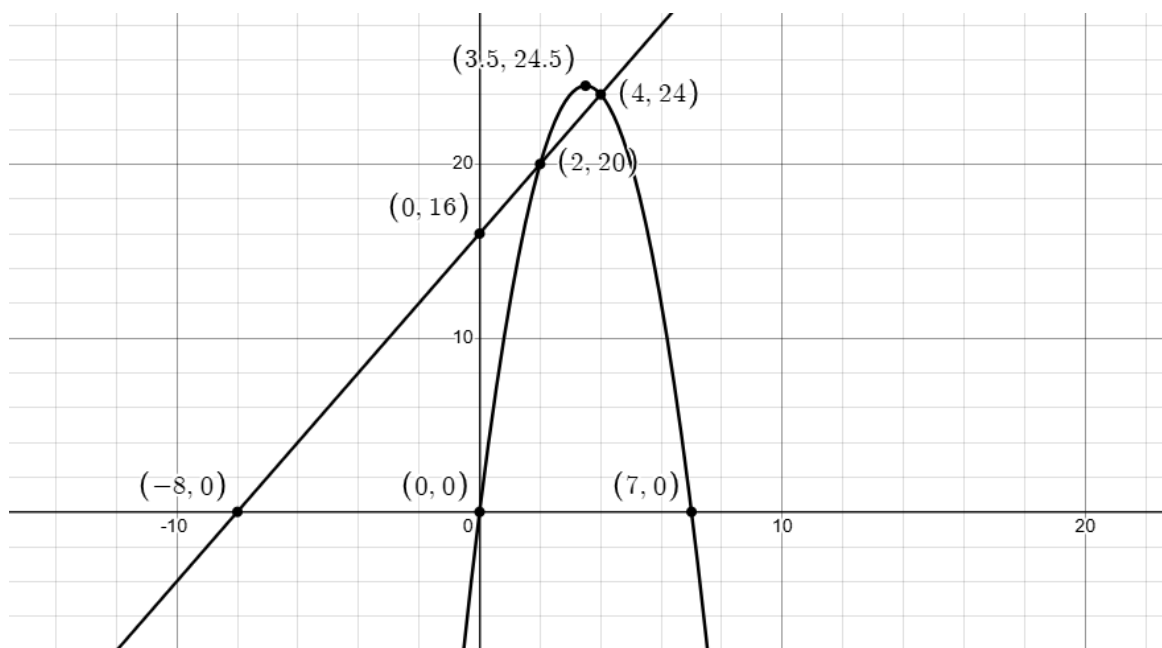
$$TC(Q) = 16 + 2Q \quad TR(Q) = 14Q - 2Q^2$$

$$16 + 2Q = 14Q - 2Q^2 \implies 2Q^2 - 12Q + 16 = 0 \implies Q^2 - 6Q + 8 = 0$$

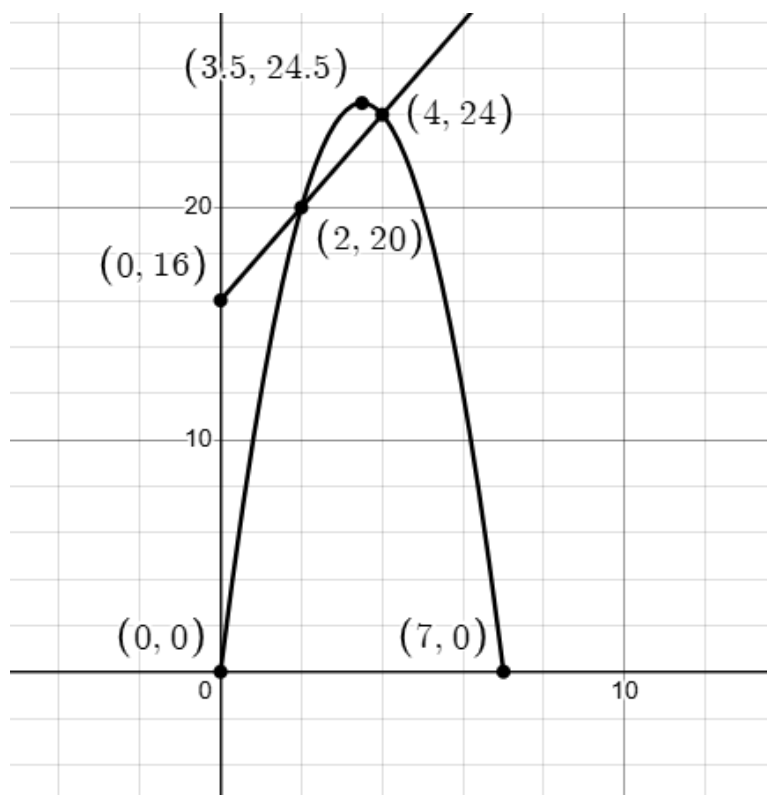
$$\implies Q = 2, 4$$

אם כן, נקודות החיתוך בין שתי הפונקציות הן: $(2, 20)$, $(4, 24)$.

סרטוט (ללא התייחסות לתחום ההגדרה):



סרטוט (עם התייחסות לתחומי ההגדרה):



סעיף ב' (5 נק':)

קבעו עבור אלו כמויות המפעל ירוויח ועבור אלו כמויות המפעל יפסיד.

פתרון סעיף ב':

המפעל ירוויח כאשר ההכנסה (הפדיון) גדולה מהעלות ויפסיד כאשר ההכנסה קטנה מהעלות.

ניתן לראות בגרף שעבור $0 \leq Q < 2$, $4 < Q \leq 7$ מתקיים כי $TR(Q) < TC(Q)$ ולכן

אם כמות המחשבים היא $0 \leq Q < 2$, $4 < Q \leq 7$ אז המפעל יפסיד.

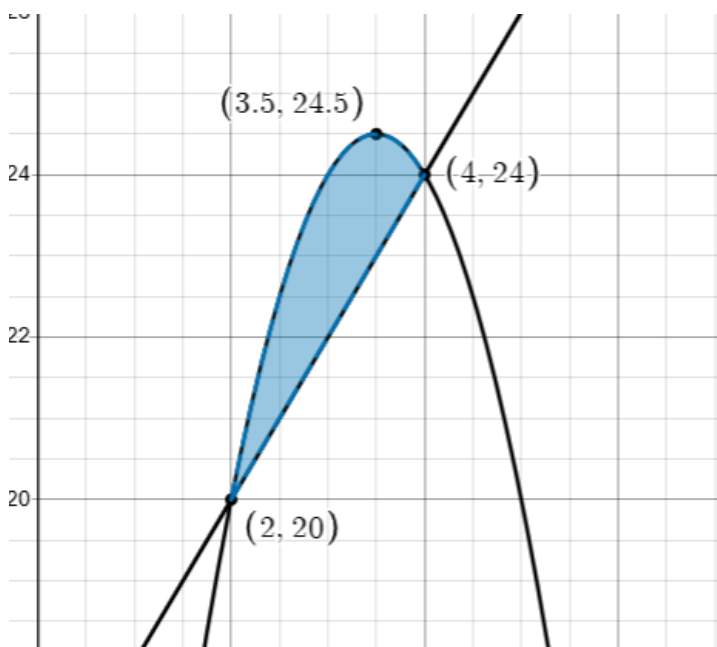
כמו כן, ניתן לראות כי אם כמות המחשבים היא $2 < Q < 4$ אז $TR(Q) > TC(Q)$ ובמצב כזה המפעל ירוויח.

סעיף ג' (10 נק'):

מיצאו את השטח הכלוא בין גרף $TR(Q)$ לבין גרף $TC(Q)$.

פתרון סעיף ג':

השטח הכלוא בין הגרפים הוא השטח המסומן הבא:



ניתן לראות כי עבור $2 \leq Q \leq 4$ מתקיים כי $TC(Q) \leq TR(Q)$ (גרף הפדיון/ההכנסה מעל גרף העלות)

ולכן השטח הנדרש יחושב כך:

$$S = \int_2^4 (TR(Q) - TC(Q)) dQ = \int_2^4 (14Q - 2Q^2 - (16 + 2Q)) dQ = \int_2^4 (12Q - 2Q^2 - 16) dQ =$$

$$= \left[12 \cdot \frac{Q^2}{2} - 2 \cdot \frac{Q^3}{3} - 16Q \right]_2^4 = \left(12 \cdot \frac{4^2}{2} - 2 \cdot \frac{4^3}{3} - 16 \cdot 4 \right) - \left(12 \cdot \frac{2^2}{2} - 2 \cdot \frac{2^3}{3} - 16 \cdot 2 \right) = \frac{8}{3}$$

אם כן השטח הכלוא שווה ל- $\frac{8}{3} = 2.6666...$

שאלה 2

סעיף א':

שיעור הריבוי הוא $\frac{1}{50}$ ושיעור ההפחתה הוא $\frac{1}{20}$. לכן שיעור השינוי הכללי הוא

$$\frac{1}{50} - \frac{1}{20} = \frac{2-5}{100} = \frac{-3}{100} = -0.03$$

כלומר, שיעור העצים יורד בכל שנה ב-3%.

סעיף ב':

נסמן את מספר העצים כיום ב- N . לאחר x שנים מספר העצים יהיה

$$f(x) = N \cdot (1 - 0.03)^x = N \cdot 0.97^x$$

כאשר מספר העצים יקטן ב-30%, הכמות N תהפוך ל- $0.7N$.

אם כן, נחפש x שיקיים $f(x) = 0.7 \cdot N$. כך נקבל את המשוואה:

$$N \cdot 0.97^x = 0.7 \cdot N$$

$$0.97^x = 0.7$$

$$\ln(0.97^x) = \ln(0.7)$$

$$x \cdot \ln(0.97) = \ln(0.7)$$

$$x = \frac{\ln(0.7)}{\ln(0.97)} \implies x \approx 11.7099$$

כלומר, לאחר 11.7099 שנים.

סעיף ג':

כעת הפונקציה המתאימה היא $g(x) = N \cdot (1 + a)^x$ כאשר N הוא מספר העצים כיום.

נתון כי לאחר 7 שנים, כמות העצים תאבד חצי מכמותה. כלומר, $g(7) = 0.5N$.

$$N \cdot (1 + a)^7 = 0.5N$$

$$(1 + a)^7 = 0.5$$

$$1 + a = \sqrt[7]{0.5}$$

$$a = \sqrt[7]{0.5} - 1 \approx -0.09427$$

אם כן, שיעור השינוי הוא -9.427% . כלומר, תהיה ירידה שנתית של 9.427% .
סעיף ד':

כעת הפונקציה המתאימה היא $h(x) = N \cdot (1 + c)^x$ כאשר N הוא מספר העצים כיום.
 נתון כי לאחר 7 שנים, כמות העצים תכפיל את כמותה ב-2. כלומר, $g(7) = 2N$.

$$N \cdot (1 + c)^7 = 2N$$

$$(1 + c)^7 = 2$$

$$1 + c = \sqrt[7]{2}$$

$$c = \sqrt[7]{2} - 1 \approx 0.104089$$

כלומר תהיה עלייה שנתית של 10.4% .

שיעור זה מורכב משיעור הריבוי פחות שיעור ההפחתה. ידוע כי שיעור ההפחתה השנתי הוא $\frac{1}{20} = 5\%$
 ולכן שיעור הריבוי השנתי הוא כ-

$$b = 10.4\% + 5\% = 15.4\%$$

שאלה 3

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x}$$

א.

ת.ה.: $x \neq 0$

חיתוך עם הצירים:

ציר ה- x :

$$f(x) = 0 \implies \frac{(x-1)^2}{x} = 0 \implies (x-1)^2 = 0 \implies x-1 = 0 \implies x = 1$$

נקודת החיתוך עם ציר ה- x היא אחת - $(1, 0)$.

ציר ה- y :

$$f(0) = \frac{(0-1)^2}{0} \implies \text{not define}$$

אין חיתוך עם ציר ה- y .

ב.

עליה, ירידה ונקודות קיצון:

$$f'(x) = \frac{2(x-1) \cdot x - (x-1)^2}{x^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2 + 2x - 1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

$$x^2 - 1 = 0 \implies x^2 = 1 \implies x = \pm 1$$

$$x^2 = 0 \implies x = 0$$

אם כן, הנקודות החשודות הינן: $x = 0, 1, -1$

לכן הטבלה תיראה כך :

x	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	+2
$f'(x)$	$\frac{3}{4} > 0$	0	$\frac{-0.75}{0.25} < 0$	לא מוגדר	$\frac{-0.75}{0.25} < 0$	0	$\frac{3}{4} > 0$
$f(x)$	עולה	מקסימום מקומי	יורדת	לא מוגדר	יורדת	מינימום מקומי	עולה

לסיכום,

f , $x < -1$ עולה.

f יורדת, $-1 < x < 0$, $0 < x < 1$

f , $x > 1$ עולה.

$(-1, -4)$ נקודות מקסימום מקומי.

$(1, 0)$ נקודות מינימום מקומי.

ג.

קמירות, קעירות ונקודות פיתול:

$$f''(x) = \left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)' = \frac{2x \cdot x^2 - (x^2-1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2x^3 - 2x^3 + 2x}{x^4} = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

אין מאפסים למונה אך $x = 0$ מאפס את המכנה.

לכן הטבלה תיראה כך :

x	-1	0	1
$f'(x)$	$-2 < 0$	לא מוגדר	$2 > 0$
$f(x)$	קעורה/בוכה	לא מוגדר	קמורה/צוחקת

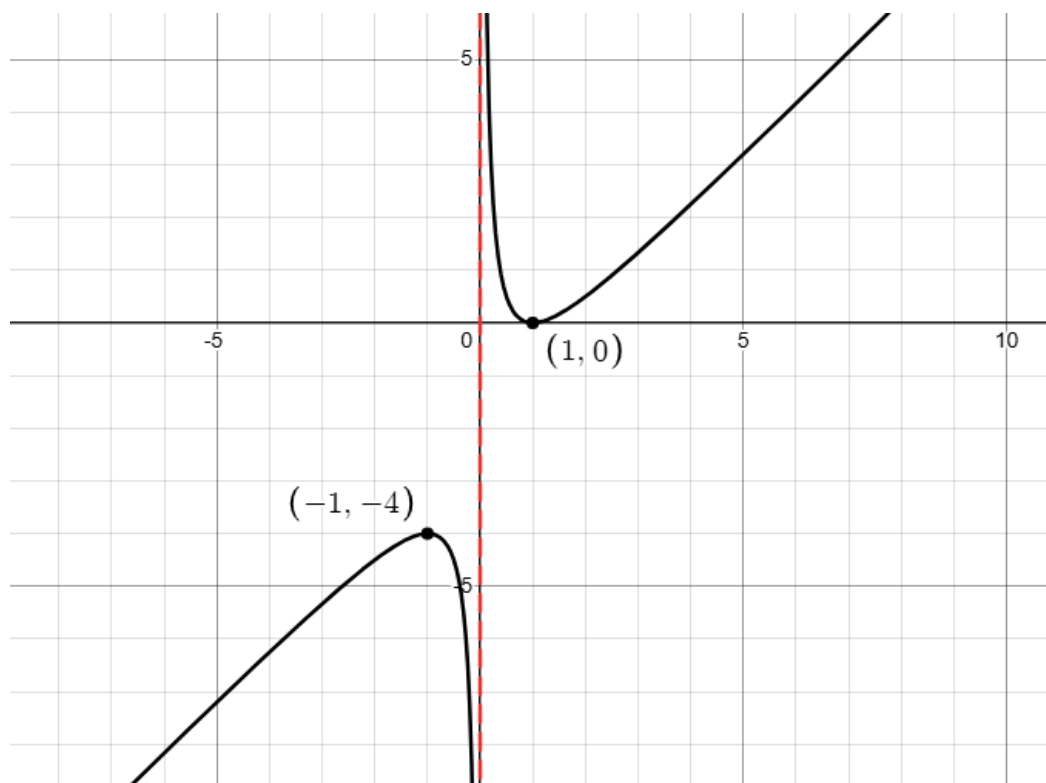
אם $x < 0$ אז f קעורה.

אם $x > 0$ אז f קמורה.

מכיוון ש- f לא מוגדרת ב- $x = 0$ אין נקודת פיתול.

ד.

גרף:



ה.

מהגרף ניתן לראות שנקודת המינימום המוחלט של f בקטע $0.5 \leq x \leq 6$ מתקבלת ב- $(1, 0)$

ואילו נקודת המקסימום המוחלט מתקבלת באחת מן הקצוות: $x = 6$ או $x = 0.5$.

כדי לגלות מי מביניהן היא הנקודה נגלה את ערכיהן.

$$f(6) = \frac{25}{6} = 4\frac{1}{6}, \quad f(0.5) = \frac{0.25}{0.5} = \frac{1}{2}$$

מכיוון ש- $4\frac{1}{6} > \frac{1}{2}$ נקבל ד- $(6, 4\frac{1}{6})$ היא נקודת המקסימום המוחלט.

ראשית, נמצא את הנקודות בהן מתקיימים תנאי סדר ראשון לקיצון מקומי, כלומר, הנקודות בהן הנגזרות החלקיות מתאפסות.
(נקודות סטציונריות)

$$f(x, y) = 20x^2 + 30y^2 + 40$$

$$f_1(x, y) = 40x$$

$$f_2(x, y) = 60y$$

כעת נחפש נקודות המקיימות:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0 \\ f_2(x, y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 40x = 0 \\ 60y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

אם כן, הנקודה החשודה לקיצון היא $(0, 0)$.

כעת נבדוק תנאי סדר שני, עבור אפיון הנקודות מהשלב הראשון.

$$A = f_{11}(x, y) = (40x)'_1 = 40$$

$$C = f_{22}(x, y) = (60y)'_2 = 60$$

$$B = f_{12}(x, y) = (40x)'_2 = 0$$

נחשב את $AC - B^2$ בנקודה $(0, 0)$. מכיוון ש- A, B, C אינם תלויים ב- x ו- y נקבל כי:

$$AC - B^2 = 40 \cdot 60 - 0^2 = 2400 > 0$$

מכיוון ש- $AC - B^2 > 0$ אז $(0, 0)$ היא נקודת קיצון מקומי.

בנוסף, $A = 40 > 0$ (או $C = 60 > 0$) אז זוהי נקודת מינימום מקומי.

סעיף ב':

האילוץ הנתון שקול לאילוץ $x + y - 10 = 0$. אם כן, נגדיר $g(x, y) = x + y - 10$ ונתון כי

$$f(x, y) = 20x^2 + 30y^2 + 40$$

נגדיר את הלגראנז'יאן:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda \cdot g(x, y) = 20x^2 + 30y^2 + 40 - \lambda(x + y - 10)$$

ראשית, נמצא את הנקודות בהן מתקיימים תנאי סדר ראשון לקיצון מקומי תחת אילוץ,

כלומר, הנקודות בהן הנגזרות החלקיות של הלגראנז'יאן מתאפסות.

(נקודות סטציונריות של הלגראנז'יאן)

$$\begin{cases} L_1(x, y) = 0 \\ L_2(x, y) = 0 \\ L_3(x, y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 40x - \lambda = 0 \\ 60y - \lambda = 0 \\ -(x + y - 10) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\lambda}{40} \\ y = \frac{\lambda}{60} \\ x + y - 10 = 0 \end{cases}$$

נציב את שקיבלנו בשתי המשוואות הראשונות בתוך המשוואה השלישית:

$$x + y - 10 = 0 \implies \frac{\lambda}{40} + \frac{\lambda}{60} - 10 = 0 \implies \frac{\lambda}{40} + \frac{\lambda}{60} - 10 = 0 \quad / \cdot 120$$

$$3\lambda + 2\lambda - 1200 = 0 \implies 5\lambda = 1200 \implies \lambda = 240$$

נציב את $\lambda = 240$ בשתי המשוואות הראשונות של המערכת האחרונה:

$$x = \frac{\lambda}{40} \implies x = \frac{240}{40} = 6$$

$$y = \frac{\lambda}{60} \implies y = \frac{240}{60} = 4$$

אם כן, הנקודה החשודה לקיצון תחת האילוץ היא $(6, 4)$.

כדי לאפיין נקודה זו כנקודת מינימום או מקסימום מקומי תחת האילוץ, נפנה לתנאי סדר שני המתאימים.

$$L_{11}(x, y) \cdot (g_1(x, y))^2 + L_{22}(x, y) \cdot (g_2(x, y))^2 - 2 \cdot L_{12}(x, y) \cdot g_1(x, y) \cdot g_2(x, y)$$

$$L_{11}(x, y) = (40x - \lambda)'_1 = 40$$

$$L_{12}(x, y) = (40x - \lambda)'_2 = 0$$

$$L_{22}(x, y) = (60y - \lambda)'_2 = 60$$

$$g_1(x, y) = (x + y - 10)'_1 = 1$$

$$g_2(x, y) = (x + y - 10)'_2 = 1$$

מכיוון שכל הביטויים לעיל אינם תלויים ב- x או y , אז תנאי הסדר השני בנקודה $(6, 4)$ (ובכל נקודה) שווה ל:

$$40 \cdot 1^2 + 60 \cdot 1^2 - 2 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 1 = 100 > 0$$

מכיוון שהביטוי הוא חיובי נקבל כי זוהי נקודת מינימום.

לסיכום, $(6, 4)$ היא נקודת מינימום מקומי של $f(x, y)$ תחת האילוץ $g(x, y) = 0$.