מגבלות הלכסון

ושיטת הלכסון החלש

סמינר בחישוביות 20370

שם המגיש: חנניה לוי

ת.ז: 303035026

שם המנחה: ד"ר אלעזר בירנבוים

האוניברסיטה הפתוחה

תוכן עניינים

1. מבוא.......................................................................................3
2. אורקלים..................................................................................5
3. שיטת החישוב היחסי.................................................................8
4. שיטת הלכסון ומגבלותיה...........................................................10

4.1.הקדמה............................................................................10

4.2.משפט ..........................................10

1. שפות אוניברסליות....................................................................16

5.1.שפה אוניברסלית................................................................16

5.2.משפט ...................................................................21

1. שיטת הלכסון החלש.............................................................. ..24
2. סיכום ומסקנות........................................................................28
3. ביבליוגרפיה............................................................................29

*1. מבוא*

לכסון היא שיטת הוכחה מתמטית שיש לה שימושים רבים במדעי המחשב ובמתמטיקה.

בסמינר זה נתייחס לשיטת הלכסון כדרך שבעזרתה מוכיחים שמחלקה כלשהי שונה ממחלקה אחרת , על ידי כך שמראים ש- מוכלת ממש ב-. המחלקות  יכולות להיות מחלקות מספרים (כמו ), אך נתייחס בפרט למצב בו  הן מחלקות של שפות, כאשר  היא תת קבוצה של מחלקת השפות המזוהות טיורינג (לדוגמה  מחלקת השפות הכריעות לעומת מחלקת כל השפות המזוהות טיורינג ).

הרעיון הכללי של שיטת הלכסון הוא גם הרעיון שעומד בבסיס האלכסון של קנטור. לצורך ההוכחה שמחלקת שפות מזוהות טיורינג  מוכלת ממש במחלקת שפות  מסתמכים על כך שניתן למנות את קבוצת כל מכונות הטיורינג1.

מכיוון שקיימת מנייה כזו , הרי שכל מכונת טיורינג  יכולה לקבל כקלט מכונת טיורינג אחרת  במנייה (שניתן לזהות אותה עם המספר הטבעי ).

כעת, נתאר לעצמנו טבלה בעלת אורך אינסופי ורוחב אינסופי. כל שורה בטבלה מכילה מידע על מכונת טיורינג אחת מתוך מכונות הטיורינג שבמנייה.

כל עמודה מכילה מידע על קלט אחד (מספר 1 עד אינסוף, כך שכל מספר  מייצג את ). כל תא בטבלה מציין מהו הערך המוחזר ממכונת הטיורינג המתאימה לשורה של תא זה, כאשר הקלט הוא הקלט המתאים לעמודה של תא זה2.

נגדיר עתה מכונת טיורינג חדשה . הערך שהיא תחזיר עבור קלט  יהיה ההיפך מהערך של האלכסון הראשי, כלומר: אם  מחזירה על הקלט  את התשובה "כן",  תחזיר על הקלט  "לא" ולהיפך (לכל ).

מעצם הבנייה של  היא אינה יכולה להופיע במנייה , ולכן נמצאת מחוץ לקבוצה .

להשלמת ההוכחה, יש להראות כי  שייכת למחלקת השפות .

אם עלה בידינו להראות בדרך זו ש-  מוכלת ממש ב-, אז ניתן לומר שהפרדנו בין המחלקות  ו- בעזרת שיטת הלכסון.

שיטת הלכסון היא כלי יחסית שימושי וחזק שיש לו תפקידי מפתח במגוון הוכחות כמו הוכחת אי כריעותה של השפה , הוכחת משפטי היררכייה (שמראים שאם מוסיפים משאבים חישוביים למכונות טיורינג מאפשרים להן להכריע שפות שלא ניתן להכריע אותן עם משאבים מצומצמים יותר), הוכחת משפט  (שטוען שאם  אז קיימות בעיות ב- שאינן ב- וגם אינן ב-), הוכחת העובדה שקבוצת המספרים הממשיים אינה בת מנייה, והוכחת משפט אי השלמות של .

1. אנו מניחים שניתן לקודד בקידוד בינארי סופי כל מכונת טיורינג.

אוסף כל הקידודים הבינאריים הסופיים הוא בן מנייה ולכן אוסף כל מכונות הטיורינג הוא בן מנייה.

1. יש להדגיש כי כאן נעסוק במכונות טיורינג שמחזירות "כן" או "לא" בלבד, או שאינן עוצרות כלל. בדרך כלל נשתמש במנייה שמכילה את כל מכונות הטיורינג שמזהות שפות השייכות למחלקת סיבוכיות מסוימת  ולא של כל מכונות הטיורינג.

למרות מעלותיה של שיטת הלכסון, יש לה מגבלות.

אחרי שנדבר בפרקים 2 ו-3 בסמינר על אורקלים ועל אופן השימוש בהם להכרעת בעיות, נוכל להוכיח בפרק 4 את משפט  לפיו לא ניתן להפריד בעזרת לכסון בין מחלקות הסיבוכיות  ו-.

מכאן והלאה נכנה את שיטת הלכסון בשם "שיטת הלכסון הרגיל".

בחלק השני של הסמינר נציג בפרק 5 את המונחים "שפה אוניברסלית"

ו"סגירות של מחלקת שפות לשינויים סופיים", ובעזרתם נציג ונוכיח את משפט .

בפרק 6 נציג שיטה נוספת להפרדה בין שתי מחלקות של שפות הנקראת "שיטת הלכסון החלש", שאופיה מזכיר במבט ראשון את אופי שיטת הלכסון הרגיל, אך למעשה נראה, תוך שימוש במשפט , ששיטת הלכסון החלש היא חזקה יותר משיטת הלכסון הרגיל במובן שאם  אז ניתן להוכיח זאת בעזרת לכסון חלש, ולא ניתן להוכיח זאת בעזרת לכסון רגיל.

חשוב להדגיש שאנו מוכיחים רק שאם  אז ניתן להפריד בין המחלקות האלה בעזרת שיטת הלכסון החלש, ולא מראים דרך שיטתית לעשות זאת. מכאן ועד עצם ההוכחה ש- או  עוד ארוכה הדרך!

*2. אורקלים*

**אורקל**- *הגדרה 2.1*

תהי שפה  ומילה כלשהי .

**אורקל** לשפה  הוא מכונה מופשטת בעלת היכולת לדווח אם  או .

**מכונת טיורינג עם אורקל** – *הגדרה 2.2*

תהי שפה .

נסמן **מכונת טיורינג  עם אורקל** לשפה  בסימון .

 היא מכונת טיורינג משוכללת בעלת שני סרטים וראש קורא/כותב לכל סרט.

הסרט הראשון של  הוא סרט הקריאה/כתיבה הרגיל.

הסרט השני של  נקרא "סרט האורקל" והאלפבית הוא האלפבית של השפה  שיכול להיות שונה מהאלפבית של סרט הקריאה/כתיבה הרגיל.

 מכילה שלושה מצבים מיוחדים נוספים: .

מפעם לפעם  יכולה להיכנס למצב , וברגע שזה קורה הפעולות הבאות מתרחשות בצעד חישובי בודד:

* המילה  בסרט האורקל נקראת כקלט לבעיה  שמכריע האורקל.
* אם האורקל קובע ש- המכונה  נכנסת למצב .
* אם האורקל קובע ש- המכונה  נכנסת למצב .

כלומר בכל פעם שבה  כותבת מחרוזת  על סרט האורקל, היא יכולה לבדוק בצעד חישובי בודד, תוך שימוש באורקל לשפה , אם  או לא.

מכונות טיורינג לא דטרמיניסטיות עם אורקל מוגדרות באופן דומה.

דוגמא 1

נראה שימוש באורקל לשפה .

על ידי שימוש במכונה  ניתן להכריע יותר שפות מאשר במכונת טיורינג רגילה, כמו למשל את השפה  עצמה פשוט על- ידי תשאול האורקל האם מילת הקלט שייכת ל-והחזרת התשובה של האורקל.

בעזרת  ניתן להכריע גם את השפה .

במקרה זה  תראה כך:

= " בהינתן קלט  כאשר  היא מכונת טיורינג בצע:

1. בנה מכונת טיורינג  באופן הבא:

= " עבור קלט כלשהו :

1. הרץ את  על כל המילים ב- (למשל לפי הסדר הסטנדרטי שלהן).
   1. אם  קיבלה מילה כלשהי, קבל."

2. שאל את האורקל האם .

2.1) אם כן, החזר לא.

2.2) אחרת החזר כן."

אם  אז  תקבל כל קלט ובפרט את  ולכן האורקל יחזיר כן בשלב (2.1) ו- תחזיר לא כנדרש.

אם  אז  לא תקבל אף מילה, ובפרט לא את  ולכן האורקל יחזיר לא בשלב (2.1) ו- תחזיר כן כנדרש.

לכן  מכריעה את .

**כריעות של שפה A בעזרת (אורקל ל-) שפה B** – *הגדרה 2.3*

שפה תיקרא **כריעה בעזרת (אורקל ל-) שפה**  אם קיימת  שמכריעה את .

**רדוקציית טיורינג משפה A לשפה B** – *הגדרה 2.4*

נאמר ש**שפה  ניתנת לרדוקציית טיורינג לשפה **, ונרשום  אם  כריעה בעזרת (אורקל ל-) שפה .

דוגמא 2

לפי דוגמא 1 ניתן להסיק שמתקיים 

**משפט 2.5**

אם  ו- כריעה אז  כריעה.

הוכחה: אם  כריעה אז נוכל להחליף את האורקל לשפה  בתהליך ממשי המכריע את השפה , וכך אם עד כה הייתה  כריעה ע"י  היא תהיה כעת כריעה ע"י מכונת טיורינג רגילה, כלומר כריעה במובן הרגיל. ∎

טענה 2.6

אם  אז .

הוכחה

נבנה  להכרעת .

 = " עבור מילה כלשהי  בצע:

1. הפעל את רדוקצית המיפוי  על  ושאל את האורקל של השפה  האם .
   1. אם כן, החזר כן.
   2. אחרת, החזר לא." ∎

*3. שיטת החישוב היחסי*

בשיטת החישוב היחסי אנו משכללים את המודל של מכונת טיורינג הרגילה  להיות מכונת טיורינג עם אורקל לשפה מסויימת , שנסמנה . באופן זה, כאמור,  יכולה להכריע בעיות ש- לא יכלה בעבר.

אומרים על  שהיא מחשבת "באופן יחסי לשפה " ומכאן שם הביטוי "חישוב יחסי".

החישוב היחסי מסתמך למעשה על שימוש באורקלים כ"קופסאות שחורות". בהינתן מכונת טיורינג  עם אורקל  לשפה ,  יכולה בכל שלב לבדוק שייכות של מילה  ל- על ידי קריאה ל-  שיפעל על , בעלות של צעד חישובי בודד.

- *הגדרה 3.1*

מחלקת כל השפות שניתנות להכרעה בזמן פולינומיאילי על ידי מכונת טיורינג עם אורקל לשפה , כלומר על ידי .

*- הגדרה 3.2*

מחלקת כל השפות שניתנות להכרעה בזמן פולינומיאילי על ידי מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית עם אורקל לשפה , כלומר על ידי  לא דטרמיניסטית.

דוגמא 3

נראה שמתקיים, .

תהי .

 היא בעיה ב- ולכן , כלומר קיימת רדוקציה  הניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי כך שמתקיים  .

נראה ש-. לשם כך נבנה  שמכריעה את  בעזרת אורקל ל- בזמן פולינומיאלי.

 = " עבור קלט  בצע:

1. חשב את .
2. בדוק בעזרת האורקל אם .
   1. אם כן, החזר כן.
   2. אחרת, החזר לא."

ברור שהמכונה מכריעה את .

כל אחד מהשלבים נעשה בזמן פולינומיאלי (מניחים ששלב 2 נעשה בצעד חישובי בודד).

הראנו ש-ולכן , כי , בהיותה מחלקה דטרמיניסטית, סגורה תחת פעולת משלים.

דוגמא 4

נראה שמתקיים .

 היא שפת כל המחרוזות מהצורה  כאשר  נוסחה בוליאנית, ולא קיימת נוסחה בוליאנית אחרת  ששקולה ל- וגם קצרה ממנה.

לכן  היא שפת כל המחרוזות מהצורה  כאשר  נוסחה בוליאנית, וקיימת נוסחה בוליאנית אחרת  ששקולה ל- וגם קצרה ממנה .

נבנה  לא דטרמיניסטית המכריעה את  בזמן פולינומיאלי.

= " על קלט  כאשר  נוסחה בוליאנית בצע:

1. נחש וכתוב על סרט האורקל נוסחה בוליאנית  הקצרה מהנוסחה .
2. בנה את 
3. השתמש באורקל (המכריע את ) כדי לבדוק אם .
   1. אם כן, החזר לא.
   2. אחרת, החזר כן."

ברור ש- עובדת בזמן (לא דטרמיניסטי) פולינומיאלי בגודל הקלט.

כעת, אם  אז קיימת  הקצרה מ-כך ש- . אם המכונה  תבחר בשלב 1 את , ותיתן את  לאורקל בשלב 3, האורקל במקרה זה יחזיר לא כי , ולכן  תחזיר כן, כנדרש. אם  אז לא קיימת שום נוסחה הקצרה מ- ושקולה לה, ולכן עבור כל בחירה בשלב 1 של נוסחה קצרה יותר , תהיה בהכרח השמה המספקת את , ולכן האורקל יחזיר כן עבור הקלט , ו-  תחזיר לא.

נשים לב שייתכן שמתקיים  מהסיבה הבאה:

אם היינו מוותרים על שלב 1 הלא דטרמיניסטי בתיאור , היינו צריכים לעבור באופן ממצה על כל הנוסחאות  שאורכן קטן ממש מ- ולבדוק בעזרת האורקל אם 

אבל אם למשל  אז מספר הנוסחאות הקצרות מ- הוא אקספוננציאלי באורך של , כי לכל תת-קבוצה ממש של המשתנים מתאימה נוסחה קצרה מ-, ומספר התת-קבוצות האלה אקספוננציאלי באורך של .

כלומר, ברגע שמוותרים על האי דטרמיניזם, מחפשים בתוך אוסף שגודלו אקספוננציאלי, דבר שגורם לחישוב כולו לא להיות פולינומי בגודל הקלט.

*4. שיטת הלכסון* ומגבלותיה

4.1. הקדמה

כפי שנאמר במבוא לסמינר, הפרדה בין מחלקות  בשיטת הלכסון נעשית על ידי הרצות של מכונת טיורינג  על מכונות טיורינג ששפתן שייכת למחלקה . כלומר מריצים את  על קלטים ב- .

ההרצות נעשות כך ש- יכולה לדעת בצעד חישוב מסויים איך מתנהגת כל מכונת טיורינג  בריצתה על הקידוד של עצמה, ולהתנהג באופן שונה ממנה על קידוד זה.

נניח שלשתי המכונות  ניתנת היכולת להשתמש באורקל זהה (לשפה מסויימת). אז כל עוד  (המכונה המורצת) מתשאלת את האורקל, יכולה גם  לעשות זאת, וכך ניתן לסמלץ את ההרצה המקורית (של המכונה הרגילה  על המכונה הרגילה ) בעזרת ההרצה של המכונה עם האורקל  על המכונה עם אורקל זהה .

ניתן להסיק מהנאמר לעיל שכל משפט שהוכח על מכונות טיורינג רגילות תוך שימוש בשיטת הלכסון בלבד, עדיין יהיה תקף גם אם לאותן מכונות תינתן היכולת להשתמש באורקל זהה לשפה כלשהי נתונה .

כלומר כל משפט לוגי  בקשר למחלקות  שניתן להוכחה בעזרת שיטת הלכסון בלבד, יהיה נכון גם עבור המחלקות  (עם אותו אורקל לשפה בשתיהן).

בפרט, אם הייתה קיימת הוכחה ש- הנעזרת בשיטת הלכסון בלבד, ניתן היה להסיק ש- לכל שפה .

4.2. משפט Baker-Gill-Soliovay

בסעיף זה נציג את משפט  ונסביר מדוע ניתן להסיק ממנו ששיטת הלכסון אינה יכולה להפריד בין  ו-.

**משפט 4.1 (BGS) Baker-Gill-Soliovay**

1. קיימת שפה  עבורה 
2. קיימת שפה  עבורה 

הוכחה

1. ניקח את השפה

נראה שמתקיימת סדרת ההכלות הבאה:



**הוכחת הכלה **

תהי . אז קיימת מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית  המכריעה את  בזמן פולינומיאלי.  1 ולכן קיימת מכונת טיורינג  המכריעה את  במקום פולינומיאלי.

נבנה מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית  שתכריע את  במקום פולינומיאלי:

= "על קלט  בצע:

1. הפעל את  על , כך ש-בכל פעם ש- תרצה לקרוא לאורקל לשפה  על המילה בסרט האורקל שלה, היא תפעיל את  (במקום את האורקל) על המילה בסרט האורקל שלה (אני מניח ש- נכתבת בסרט האורקל של  לפני הקריאה ל- ), והחזר מה ש- מחזירה."

ברור שבאופן זה  תכריע את  והיא תעשה את זה גם במקום פולינומיאלי בגודל הקלט.

**הוכחת הכלה **

ההכלה מתקיימת כמסקנה ישירה ממשפט סביץ'.

**הוכחת הכלה **

1 ולכן (מסיבות דומות להוכחה ש-) מתקיים .

קיבלנו מהכלות  ש-, וידוע שמתקיים .

 , כלומר .

1. ראה  בביבליוגרפיה.
2. תהי שפה  כלשהי מעל א"ב  שגודלו לפחות , ותהי  אוסף כל המילים מעל  שעבורן יש ב- מילה ששווה להן באורכה, כלומר .

 היא בבירור בתוך : עבור קלט כלשהו  המכונה  תנחש מילה כלשהי  שאורכה שווה לאורך של , תרשום אותה בסרט האורקל ותשאל את האורקל לשפה  האם .

אם  היא תקבל את , אחרת תדחה.

כעת נבנה שפה מסויימת שעבורה  באופן הבא:

תהי  רשימת כל מכונות הטיורינג עם אורקל לשפה  המחשבות בזמן פולינומיאלי 2.

נניח שהמכונה  רצה בזמן פולינומיאלי .

בניית  נעשית בשלבים, כאשר בשלב ה- בונים חלק מ- המבטיח שלא ניתן יהיה להכריע את  בעזרת .

בכל שלב מצהירים על שייכות/אי-שייכות של מספר סופי של מחרוזות לשפה, כאשר בהתחלה  ריקה.

***בשלב  :***

בהנחה שעד שלב  (כולל) הכרזנו על קבוצה סופית  של מחרוזות ששייכות או לא שייכות לשפה , קיים  .

ידוע שלכל  מתקיים  ולכן קיים  כך שלכל  מתקיים . נבחר, אם כן, , כך שאותו  גם גדול מיתר  ה--ים שנבחרו בשלבים הקודמים (מניחים שבשלב  המספר שבוחרים שווה אפס).

בחירה זו מבטיחה ש- גדול מאורך כל המחרוזות שסטטוס השייכות שלהן ל- כבר נקבע וגם גדול מספיק כך ש- וגם שסדרת ה--ים שבוחרים בכל שלב היא סדרה עולה.

1. ראה  בביבליוגרפיה.
2. אנו מניחים שניתן לקודד בקידוד בינארי סופי כל מכונת טיורינג עם אורקל המחשבת בזמן ריצה כלשהו. אוסף כל הקידודים הבינאריים הסופיים הוא בן מנייה ולכן אוסף כל המכונות עם אורקל לשפה  המחשבות בזמן ריצה כלשהו הוא בן מנייה, ובפרט אוסף כל המכונות עם אורקל לשפה  המחשבות בזמן פולינומיאלי, ולכן ניתן למנות את האוסף האחרון.

כעת נראה איך להוסיף מילים לשפה  כך שיתקיים .

מריצים עד עצירה את  על הקלט  ומגיבים בכל פעם ש- מתשאלת את האורקל שלה (לשפה ) באופן הבא:

* אם  שואלת את האורקל שלה האם , כאשר  היא מילה שסטטוס השייכות שלה ל- כבר נקבע (כלומר ), האורקל ישיב "כן" אם  ו"לא" אם .
* אם  שואלת את האורקל שלה האם , כאשר  היא מילה שסטטוס השייכות שלה ל- עדיין לא נקבע (כלומר ), האורקל ישיב "לא", ונקבע ש-  (ובכך נגדיל את ).

מנקודת המבט של  בזמן הרצתה על , אם  הייתה מכריעה את  היו אמורים להתקיים התנאים הבאים:

* אם בשלב מסויים  שואלת את האורקל שלה על מילה  שאורכה , וידוע ש-, האורקל משיב "כן", ואז  אמורה לקבל את  (מהגדרת ).
* אם  מבינה, בשלב מסויים של הרצתה על , שכל המחרוזות באורך  אינן ב-, אז  אמורה לדחות את (שוב, מהגדרת ).

אבל כדי שהמכונה  תדע בוודאות שכל המחרוזות באורך  אינן ב-היא צריכה לעבור באופן ממצה על כל המחרוזות ב- שאורכן  ולשאול את האורקל לגביהן- ואין לה מספיק זמן לעשות זאת, משום שסך כל המחרוזות ב- שאורכן  שווה ומכיוון שהנחנו ש- מתקיים כאשר  הוא זמן הריצה של .

לכן, אם לא קיימת ב- מילה באורך  שנמצאת ב-, אז עד לצעד האחרון של בריצתה על , האורקל לשפה  ענה בהכרח "לא" על כל מילה שאורכה  שנכתבה בסרט האורקל של , ובצעד האחרון של על , בו היא חייבת להחליט אם לקבל או לא את  (כי היא כבר ניצלה את כל זמן הריצה האפשרי שלה), אין לה כל דרך לדעת אם אכן כל המחרוזות ב- שאורכן  אינן ב-, כלומר **אין למכונה  כל דרך לדעת אם ההחלטה לקבל את  או לא היא ההחלטה הנכונה.**

ננצל את העובדה האחרונה כדי "להכשיל" את  בניסיון להכריע את 

באופן הבא:

* אם  מחליטה לקבל את  אנו מכריזים על כל יתר המחרוזות באורך  (שנמצאות ב- ) להיות מחוץ לשפה  ובכך מבטיחים שמתקיים , מפני שידוע שעד לצעד האחרון של בריצתה על , האורקל שלה לשפה  בהכרח דחה כל מילה באורך  שעליה הוא נשאל, ולכן כל מילה ב- שאורכה  וגם נמצאת ב- בהכרח לא שייכת לשפה (ראה הערה בהמשך) . במצב זה אם מכריזים על כל יתר המחרוזות באורך  שנמצאות ב-  להיות מחוץ לשפה  מבטיחים שאין ב- מילים באורך , ולכן מהגדרת  מתקיים . 1
* אם  דוחה את  אנו מוצאים ב-  מחרוזת באורך  ש- לא שאלה את האורקל שלה לגביה ומכריזים שאותה מחרוזת תהיה ב- על מנת להבטיח ש-. קיימת בהכרח כזו מחרוזת כי  רצה  צעדים, כאשר , ולכן המספר הגדול ביותר של מילים שונות באורך  ב-  ש- שאלה את האורקל שלה לגביהן, קטן ממש מסך כל המילים באורך  ב-.

 בכל מצב אנו מבטיחים ש- לא מכריעה את .

אנו מסיימים את שלב  על ידי הכרזה שרירותית שכל המחרוזות באורך של לכל היותר  שלא נמצאות ב- (כלומר שהסטטוס שלהן לא נקבע) לא תהיינה שייכות לשפה .

לאחר שלב  עוברים לשלב  וכך הלאה.

מצאנו (על ידי בנייה) שפה  שעבורה  וגם .

  כנדרש. ∎

1. לא ייתכן שב- השלבים הקודמים היו מילים ב- שאורכן שווה  בזכות הדרישה, עוד בהגדרת , שהוא גם יהיה גדול מכל ה- ים שנבחרו בשלבים הקודמים, ואז בוודאות בשלב ה- השפה(מהגדרת הבניה שלה) אינה מכילה מילים שאורכן שווה (כל המילים ב- הן באורך קטן מ-) ולכן בשלב ה- לכל מילה באורך  שהמכונה שואלת את האורקל לגביה: או שאין סטטוס שייכות ל- בכלל, או שהיא לא שייכת ל- כי בתשאולים קודמים של האורקל באותו שלב נמצא שאין לה סטטוס שייכות ולכן גרמנו לה להיות מחוץ ל-.

מסקנות

1. הוכחת קיומן של השפות  מעידה על כך ש**לא ניתן לענות על השאלה האם , בשיטת הלכסון בלבד:**

אילו היינו יכולים להוכיח ש- או תוך שימוש בשיטת הלכסון בלבד, היה נובע מהדיון שלפני הצגת משפט , שלכל שפה  מתקיים  או שלכל שפה  מתקיים  בהתאמה, וזאת בסתירה לתוצאות המשפט.

נשים לב שבאופן מעניין הוכחת מגבלה זו של שיטת הלכסון נעשתה בעזרת שיטת הלכסון עצמה!

1. אם , אז לא ניתן להוכיח זאת בעזרת שיטת הלכסון הרגיל:

אם נניח בשלילה שכן, היה נובע מהדיון שלפני הצגת משפט , שלכל שפה  מתקיים , וזאת בסתירה לתוצאת המשפט.

(מסקנה זו נובעת מיידית ממסקנה 1 אך בחרתי לייחד אותה כי בהמשך כשנדבר על שיטת הלכסון החלש נראה שאם  אז לעומת שיטת הלכסון הרגיל, בשיטת הלכסון החלש כן ניתן להוכיח זאת).

*5. שפות אוניברסליות*

5.1. שפה אוניברסלית

**פונקציה אופיינית ורצף אופייני של שפה** – *הגדרה 5.1*

יהי  אלפבית סופי, ושפה  מעל אלפבית זה.

 הוא בן מנייה ולכן קיימת מנייה  של .

ניתן לזהות את  עם פונקציה בינארית

 כך שמתקיים

 לכל  .

פונקציה זו נקראת **הפונקציה האופיינית** של .

המחרוזת הבינארית האינסופית  נקראת **הרצף האופייני** של .

לשם נוחות נסמן גם את הרצף האופייני של  ב-, ואת התיו במקום ה-י ברצף האופייני של  ב-. כל עוד לא יצויין אחרת יציין בהמשך רק את הרצף האופייני של .

מהגדרת רצף אופייני ופונקציה אופיינית של שפה  ניתן להסיק שהתיו במקום ה-י ברצף האופייני של  יהיה 1 אם  ו-0 אחרת.

הערה 1

מהרשום לעיל ניתן לזהות כל שפה  מעל אלפבית סופי  עם הרצף האופייני שלה . תחת זיהוי זה, כשנרשום  עבור  טבעי כלשהו, הכוונה תהיה ל-, כלומר לסיבית במקום  ברצף האופייני של , שערכה שווה לערך שנותנת הפונקציה האופיינית של  עבור המספר .

**שפה אוניברסלית** – *הגדרה 5.2*

תהי  מחלקת שפות מעל אלפבית סופי ,

תהי  מנייה נתונה של ,

נזהה את המילה  עם המספר הטבעי , וכל שפה  נזהה עם הרצף האופייני שלה .

תהי מטריצה אינסופית  שכל רכיביה הם מתוך .

אז ניתן לזהות את השורה ה-ית של  עם הרצף האופייני של שפה כלשהי מעל  שנסמנה  כאשר  אם 

ו- אם .

נאמר ש- היא **שפה אוניברסלית** מעל , ונסמן זאת ב- , אם.

כלומר, אם נזהה כל שפה  עם הרצף האופייני שלה , ואת המילה  עם המספר הטבעי , אז  תהיה שפה אוניברסלית מעל מחלקת השפות  אם ורק אם .

לפעמים נקרא לשפה אוניברסלית "שפה אוניברסלית חזקה", כדי להדגיש שלא מדובר ב"שפה אוניברסלית חלשה", שאותה נגדיר בהמשך.

הערה 2

ניתן לראות את  כשפה שהמילים בה הן זוגות סדורים של מספרים טבעיים באופן ש-  אם ורק אם .

במצב זה הפונקצייה האופיינית של  תהיה פונקציה

המוגדרת באופן הבא:

 לכל 

נשים לב שניתן לתאר את  בעזרת מטריצה בינארית אינסופית, שהיא למעשה המטריצה . מטריצה זו היא כמו רצף אופייני "דו- מימדי" של שפת

הזוגות הסדורים .

עובדה זו מחזקת את הטבעיות שבזיהוי מטריצה בינארית אינסופית  עם

השפה .

תחת זיהוי זה, כשנרשום  עבור , הכוונה תהיה ל-, וכשנרשום  עבור , הכוונה תהיה למחרוזת הבינארית האינסופית  שהיא למעשה הרצף האופייני של .

**שפה אוניברסלית חלשה**- *הגדרה 5.3*

תהי  מחלקת שפות מעל אלפבית סופי ,

תהי  מנייה נתונה של , ותהי  שפה אוניברסלית.

נאמר ששפה  היא **שפה אוניברסלית חלשה** מעל מחלקת שפות , ונסמן זאת ב- , אם (עד כדי זיהוי של שפה עם צירוף אופייני שלה(.

כלומר  אם לכל  אחת מהשורות של  היא . ∎

מהרשום עד כה, ולפי הזיהוי בהערה 1 והסימונים בהערה 2, ניתן להסיק שמתקיים  אם ורק אם . לעומת זאת, אם  אז תיתכן שורה  במטריצה  שאינה מהווה רצף אופייני של אף שפה ב-.

הערה 3

מעתה נזהה את  עם השורה (שהיא למעשה הרצף האופייני ).

תחת זיהוי זה יתקיים:





**האלכסון של שפה אוניברסלית**- *הגדרה 5.4:*

תהי  מחלקת שפות מעל אלפבית סופי ,

תהי  מנייה נתונה של , ותהי  שפה אוניברסלית.

אם נזהה את המילה  עם המספר הטבעי , אז תחת הזיהויים בהערות 1 ו-2, **האלכסון** של , שנסמנו , הוא שפה מעל  שהרצף האופייני שלה מקיים  לכל .

כלומר  הוא ההפך מהערך הנמצא במקום  במטריצה .

טענה 5.5

אם , אז .

הוכחה

נניח בשלילה שמתקיים .

אז קיים  עבורו , ולכן בפרט  (1)

אבל , בסתירה ל-(1).

הנחת השלילה הובילה לסתירה ולכן היא שגויה, כלומר, כנדרש. ∎

טענה 5.6

אם  ו- , אז 

(כלומר  ניתנת לרדוקציה ל- בזמן לינארי).

הוכחה

נזהה את המילים במניית  עם מיקומן הסידורי.

במקרה זה  היא תת קבוצה של  .

כמו כן, כפי שרשום בהערה 2 , נראה ב- תת- קבוצה של .

 ולכן (בסימונים של הערה 3) קיים  עבורו .

נראה רדוקציה  מהשפה  לשפה .

 =" על קלט  כלשהו שמייצג את  בצע:

1.החזר את ."

הרדוקציה תקפה:

אם  אז מהגדרת שפה אוניברסלית  מעל מחלקת שפות , ולפי הסימונים בהערה 3, , כלומר.

מאותה סיבה, אם  אז , כלומר .

הרדוקציה לינארית: שלב 1 ברדוקציה הוא לינארי בגודל הקלט (הרדוקציה לא תלויה ב- , מפני שהוא קבוע).

מסקנה 5.7

תהיינה  שתי מחלקות של שפות.

אם קיימת  כך ש-  , וגם  סגורה ל-,

כלומר מקיימת את התנאי:

"אם  ו-  שפה כלשהי המקיימת  אז ",

אז .

הוכחה

תהי .

קיימת  שעבורה  ולכן לפי טענה 5.6 מתקיים .

כלומר קיימת  שעבורה , ולכן מתכונת הסגירות של , נקבל ש-

∎

בהינתן מחלקה בת מנייה של שפות , תמיד קיימת שפה אוניברסלית  מעל  (למשל המטריצה האינסופית שהשורה ה-ית שלה היא הרצף האופייני של ). לכן, במקרה זה לא נתעניין בשאלת הקיום של שפות אוניברסליות מעל , כי אם בסיבוכיות ההכרעה שלהן.

נציג להלן טענות המסייעות להבנת הסיבוכיות של שפות אוניברסליות.

טענה 5.8

לכל שפה אוניברסלית  מעל מחלקה כלשהי  של שפות מעל אלפבית מתקיים , כלומר  ניתנת לרדוקציית טיורינג ל- בזמן לינארי (רדוקציית טיורינג מוגדרת בפרק א).

הוכחה

נזהה את המילים במניית  עם מיקומן הסידורי.

במקרה זה  תהיה תת קבוצה של .

כמו כן, כפי שרשום בהערה 2 , נראה את  כתת- קבוצה של .

מהגדרת , לכל  מתקיים:



יהי  אורקל לשפה .

נראה שקיימת מכונת טיורינג  המכריעה בזמן לינארי את .

וכך, מהגדרת רדוקציית טיורינג, נוכיח ש-.

= " על קלט  המייצג את  בצע:

1. בדוק בעזרת  אם 

1.1. אם כן, דחה.

1.2. אם לא, קבל."

ברור ש- מחשבת בזמן לינארי (מניחים ששלב 1 לוקח זמן קבוע, מהגדרת מכונת טיורינג עם אורקל).

בנוסף, לפי מה שנרשם לפני הגדרת ,  

לכן, אם  אז לפי (1)  ולכן בשלב (1.2)  תקבל את , ואם  אז לפי (1) ולכן בשלב (1.1)  תדחה את .

טענה 5.9

תהי  משפחת שפות מעל אלפבית 

ותהי שפה אוניברסלית חלשה  מעל .

אם  סגורה תחת , כלומר מקיימת את התנאי:

"אם  ו-  שפה כלשהי המקיימת  אז ",

אז .

הוכחה

נניח בשלילה ש- . אז לפי טענה 5.8 ומתכונת הסגירות של ,

מתקיים  וזה סותר את טענה 5.5 ∎

Kozen5.2. משפט

**סגירות למספר סופי של שינויים**- *הגדרה 5.10*

מחלקת שפות  מעל  סגורה למספר סופי של שינויים אם ורק אם לכל שפה  מתקיים: אם  שפה כלשהי מעל  הנבדלת מ- רק במספר סופי של מילים, אז .

אם שפה  נבדלת משפה  במספר סופי של מילים נסמן זאת .

משפט 5.11 KOZEN))

תהי מחלקת שפות  הסגורה למספר סופי של שינויים, ותהי  כך ש-

אז לכל שפה  קיימת שפה , הניתנת לחישוב בעזרת השפות  ו-, כך ש- וגם .

הוכחה

נבנה את  בשלבים, שורה אחר שורה באופן הבא:

תחילה נגדיר .

**בשלב :**

נקבע  ו- 

כאשר  הוא האינדקס המינימלי ב-, שעבורו מתקיים .

נסביר מדוע קיים כזה :

תהי .1

אם נניח בשלילה ש- ריקה,

אז לכל  מתקיים , ובפרט אם ניקח  אז יתקיים  

נגדיר שפה  באופן הבא:

 ולכל  .

אז, לפי ,  ולכן , אבל לכל  , ולכן . 

 ולכן  

 לפי  ומכך ש- סגורה לשינויים סופיים נקבל ש-, ואז בהכרח , אבל זה לא יתכן, מפני ש- , ולפי

 האינדקס ה- של הרצף האופייני של שפה כלשהי ב- חייב להיות שונה מ- .

הנחת השלילה הובילה לסתירה, ולכן הקבוצה  אינה ריקה.

לכן  היא תת קבוצה לא ריקה של מספרים טבעיים, ומעיקרון הסדר הטוב יש לה מינימום  שזה בדיוק ה- שרצינו להוכיח את קיומו.

בכך הראינו איך אנו בונים את  בעזרת השפות .

נשים לב שמהבנייה שתוארה לעיל, בכל שלב  של הבנייה מתקיים  (כאשר  שונה בכל שלב).

כלומר, ולכן  לכל .

 .

נותר להוכיח שמתקיים .

כדי להוכיח זאת די להראות שלכל שורה ב- קיים שלב בבנייה שבו אנו מוסיפים אותה כשורה ב-, כלומר שלכל  קיים שלב כלשהו  שבו אנו קובעים .

טענת עזר:

לכל  קיים שלב כלשהו  שבו אנו קובעים .

הוכחה:

נניח בשלילה שהטענה לא נכונה. זה אומר שקבוצת ה-ים שעבורם לא קיים שום שלב במהלך הבנייה של , שבו השורה  נוספת בתור שורה ל-, היא קבוצה לא ריקה של מספרים טבעיים, שנסמנה .

1.  אינה ריקה, מפני שמהגדרת סידרת הקבוצות ,  שווה ל- פרט למספר סופי של מספרים.

מעיקרון הסדר הטוב, יש בקבוצה  מינימום שנסמנו .

אז לפי הסימונים בשלבי בניית , לכל  מתקיים .

יהי  השלב הראשון שבו קבוצת השורות  נוספת במלואה ל- (קיים כזה שלב מהגדרת ).

מאופן בניית  ומהגדרת סדרת הקבוצות , כל קבוצה בסידרה מתקבלת מהקבוצה הקודמת בסידרה זו כתוצאה מהסרת מספר טבעי בודד.

לכן בשלב ,  יהיה בהכרח האינדקס הקטן ביותר ב-.

לכן, מאחר ו- לעולם לא יוסר במהלך בניית הסידרה , נקבל שבכל שלב  כך ש-,  יהיה בהכרח המספר הקטן ביותר ב-.

לכן בהכרח עבור כל מתקיים  (אחרת ואז היינו מסירים את  במהלך בניית הסידרה , בסתירה לכך ש- שייך לכל קבוצה בסידרה זו).

אבל אז בהכרח , ומאחר ו- סגורה למספר סופי של שינויים נקבל ש-, בסתירה לנתון.

 . ∎

מסקנה

לפי משפט , אם  מחלקת שפות כלשהי הסגורה למספר סופי של שינויים אז כל שפה  היא האלכסון של שפה אוניברסלית כלשהי מעל .

*6. שיטת הלכסון החלש*

בפרק זה נציג שיטה נוספת להפרדה בין שתי מחלקות של שפות הנקראת "שיטת הלכסון החלש", שאופיה מזכיר במבט ראשון את אופי שיטת הלכסון הרגיל, אך למעשה נראה ששיטת הלכסון החלש היא חזקה יותר משיטת הלכסון הרגיל במובן שאם  אז ניתן להוכיח זאת בעזרת לכסון חלש, ולא ניתן להוכיח זאת בעזרת לכסון רגיל.

**שפה מפרידה והפרדה בין מחלקות**- *הגדרה 6.1*

תהיינה  שתי מחלקות של שפות.

הוכחה קונסטרוקטיבית ש- נעשית בשלבים הבאים:

* הגדרה של שפה 
* הוכחה ש-
* הוכחה ש-

שפה  כזו נקראת **שפה מפרידה ל- **, והוכחה ש-  באופן המתואר לעיל נקראת **הפרדה בין ל- בעזרת** .

**הפרדה בעזרת לכסון חלש**- *הגדרה 6.2*

תהיינה  שתי מחלקות של שפות.

**הפרדה בעזרת לכסון חלש בין ל-** היא הוכחה ש- הנעשית בשלבים הבאים:

1. הגדרה של שפה .
2. הוכחה ש-.
3. הוכחה ש-.

הערה 1

לפי טענה 5.5 בפרק הקודם, שלושת השלבים של הוכחה בעזרת לכסון חלש אכן מבטיחים ש- .

**הפרדה בעזרת לכסון חזק**- *הגדרה 6.3*

**הפרדה בעזרת לכסון חזק בין ל-** היא הוכחה ש- הנעשית בשלבים הבאים:

1. הגדרה של שפה .
2. הוכחה ש-.
3. הוכחה ש-.
4. הוכחה ש: (a) סגורה תחת  או (b)  סגורה תחת .

הערה 2

לאחר שלבים 1-3 בהפרדה בעזרת לכסון חזק:

שלב 4a מבטיח, לפי טענה 5.8 בפרק הקודם, ש-, ואז נקבל משלב 2 ולפי טענה 5.5 בפרק הקודם ש-, כי  מפרידה ביניהן.

שלב 4b מבטיח, לפי טענה 5.9 בפרק הקודם ש-.

לכן  כי  מפרידה ביניהן. ∎

תהיינה  שתי מחלקות של שפות.

נגביל את עצמנו למצב שבו  סגורה למספר סופי של שינויים וגם  סגורה תחת .

במקרה זה שיטות ההפרדה בעזרת לכסון חלש/חזק יהיו שונות זו מזו רק בשלב השלישי.

אם נרצה להוכיח ש- בהפרדה בעזרת לכסון חלש-

מספיק שנראה שקיימת  **שרירותית** כי אז משפט  מראה איך לבנות שפה אוניברסלית חזקה (ובפרט חלשה)  כך ש-.

לעומת זאת אם נרצה להוכיח ש- בהפרדה בעזרת לכסון חזק-

נצטרך להראות שקיימת  **כך ש-**. ואז נוכל לבחור  בהגדרת הפרדה בעזרת לכסון חזק.

זה מסביר את מקור הכינויים "חלש" ו-"חזק" ומראה שבמקרה בו  סגורה למספר סופי של שינויים וגם סגורה תחת , הפרדה בין  ל- בעזרת לכסון חזק גוררת הפרדה בעזרת לכסון חלש.

באופן טבעי שתי דרכי ההפרדה בעזרת לכסון חלש/חזק יכולות לשמש כמקרים פרטיים של "הפרדה בעזרת לכסון ישיר", כלומר הפרדה בתהליך של "סידור" כל השפות של המחלקה  בתור שורות של מטריצה אינסופית , ואיפיון של שפה  שלא יכולה להיות שורה במטריצה זו, כי לכל  מתקיים , אבל מקיימת .

טענה 6.4

המחלקה  סגורה למספר סופי של שינויים וסגורה תחת .

הוכחה

תהי  ותהי  כך ש- ותהי .

אז  סופית ולכן ניתן להכריע אותה בזמן לינארי: בהינתן מילה , נשווה אותה לכל אחת מהמילים ב- תו-תו. השוואה למילה אחת כלשהי ב- היא לינארית, ומפני ש- סופית, במקרה הגרוע השוואת  לכל המילים ב- תהיה לינארית. לכן  ומסגירות  לחיסור, .

תהי .

מסיבה דומה ל- , גם , ומהגדרת  מתקיים .

 מסגירות  לאיחוד סופי , כנדרש.

  סגורה למספר סופי של שינויים.

תהי הפעם  כך ש- .

אז ניתן להכריע את  בעזרת אורקל לשפה , שנסמנו , בזמן ריצה לינארי, בעזרת מכונה .

ניתן להמיר את  במכונת טיורינג רגילה המכריעה את  בזמן פולינומיאלי באופן הבא:

 ולכן קיימת מכונת טיורינג  המכריעה את  בזמן פולינומיאלי.

בזמן פעולת  על מילת קלט כלשהי, נחליף הפעלה של האורקל  על מילה  (שנכתבת בסרט האורקל) בהפעלת  על , ונייחס להפעלה זו זמן ריצה פולינומיאלי ביחס ל- במקום זמן ריצה קבוע.

מכיוון שמילה הנכתבת בסרט האורקל היא בגודל לינארי ביחס למילת הקלט של , המכונה תעבוד בזמן פולינומיאלי ביחס למילת הקלט של , וכל תהליך ההכרעה של  יהיה פולינומיאלי.

  ולכן המחלקה  סגורה ל- כנדרש.

מסקנות

נשים לב ש- בת מנייה:

אוסף כל הקידודים הבינאריים של מכונות טיורינג מכריעות הוא בן מנייה, ובפרט אוסף כל הקידודים של מכונות טיורינג המכריעות בזמן פולינומיאלי, ולכל שפה ב- יש מכונת טיורינג המכריעה אותה בזמן פולינומיאלי. לכן מספר השפות ב- קטן/שווה למספר מכונות הטיורינג המכריעות בזמן פולינומיאלי, ובגלל שהאחרון בן מנייה, גם מספר השפות ב- הוא בן מנייה.

כלומר , ולכן קיימת שפה אוניברסלית  מעל  (למשל מטריצה שהשורה ה-ית בה היא הרצף האופייני של ).

כעת, נניח שקיימת הוכחה המפרידה בין  ובין .

זה אומר שקיימת . 

לפי טענה 6.4 המחלקה  סגורה למספר סופי של שינויים ותחת  

לכן, לפי  ולפי הדיון שלפני טענה 6.4, ניתן להפריד בעזרת לכסון חלש בין המחלקות .

כלומר הגענו למסקנה הבאה:

**כל הוכחה המפרידה בין  ובין  , יכולה להיכתב מחדש בתור הפרדה בעזרת לכסון חלש.**

*7. סיכום ומסקנות*

תהיינה  ו- שתי מחלקות של שפות.

אם  ו-, אז קיימת .

אם  בת מנייה, הצגנו בסמינר זה שתי שיטות שבעזרתן אפשר לנסות להפריד בין  ו-: שיטת הלכסון הרגיל ושיטת הלכסון החלש.

במסגרת הפרדת  מ- בשיטת הלכסון החלש, בונים מטריצה אינסופית  שכל שורה בה היא רצף אופייני של שפה כלשהי ב-, כך שהאלכסון שלה , שווה ל- (קיימת כזו מטריצה לפי משפט ).

כלומר כל רכיב במטריצה האינסופית שבונים בשיטת הלכסון החלש מייצג שייכות או אי שייכות של מילה בודדת לשפה כלשהי ב- ואפקט הלכסון בא לידי ביטוי בכך שמילה בודדת  תהיה שייכת לשפה  אם ורק אם היא לא תהיה שייכת לשפה .

לעומת זאת, בשיטת הלכסון הרגיל שתארנו במבוא בונים מטריצה אינסופית שכל רכיב בה מייצג קבלה או אי קבלה בעקבות הפעלה של מכונת טיורינג אחת על מכונת טיורינג שניה (נניח לצורך הדיון שכל המכונות האלה מכריעות), ואפקט הלכסון בא לידי ביטוי בבניית מכונת טיורינג  כך ש-  הוא קלט "כן" של  אם ורק אם  הוא קלט "לא" של .

כלומר בשיטת הלכסון החלש מסדרים באופן ממצה את המידע על כל המילים ביחס לכל השפות ב- שורה-שורה במטריצה אינסופית, ומראים ש- לא יכולה להתקבל כאחת משורות אלה, ובשיטת הלכסון הרגיל בונים מטריצה אינסופית על סמך קבלה/דחייה על ידי מכונת טיורינג כלשהי המכריעה שפה ב-, כשהיא מקבלת כקלט קידוד של מכונת טיורינג אחרת כזו. כלומר המידע בטבלה אינו קבלה או דחייה של כל מילה אפשרית, אלא של קידודי מכונות, ולכן מבחינה אינטואיטיבית, מידע זה נראה פחות ממצה מאשר המידע במטריצה שבונים בשיטת הלכסון החלש, ועל כן עלולים ביצועי שיטת הלכסון הרגיל בנסיון להפריד בין המחלקות  להיות פחות טובים משיטת הלכסון החלש.

ואכן, הסקנו, באופן פורמלי, ממשפט  שאם , אז לא ניתן להוכיח זאת בעזרת שיטת הלכסון הרגיל, ולעומת זאת, הסקנו ממשפט  שאם  אז ניתן להוכיח זאת בעזרת שיטת הלכסון החלש.

נדגיש שוב, שאנו מוכיחים רק שאם  אז ניתן להפריד בין המחלקות האלה בעזרת שיטת הלכסון החלש, ולא מראים דרך שיטתית לעשות זאת. מכאן ועד עצם ההוכחה ש- או  עוד ארוכה הדרך!

ביבליוגרפיה

 Nash,A.,Impagliazo,R.,Remmel,J. "Universal Languages and the

Power of Diagonalization."18th Annual IEEE

Conference of Computational Complexity (CCC'03), 2003.

 Sipser,M. "Introduction to the Theory of Computation" 3rd adition,

, 2013. p.260-261,338-341,376-379

Arora, Sanjeev, and Boaz Barak. "Computational Complexity: a

Modern Approach". Vol. 1. Cambridge, UK: Cambridge University

Press, 3(4): 65-68, 2009.

Barkmeier '06, Kyle, "Limits of Diagonalization and the Polynomial

Hierarchy" .*Honors Projects*, 2006.