אפיון אסטרטגיות פעולה בסביבה גיאומטרית דינאמית תלת-ממדית

מירלה וידר
הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
mirelaw@technion.ac.il

אברהם ברמן
הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
berman@technion.ac.il

בוריס קויצ'ו
מכון ויצמן למדע
boris.koichu@weizmann.ac.il

Characterizing Action Strategies in a 3-D Dynamic Geometry Environment

Mirela Widder
Technion Israel Institute of Technology

Abraham Berman
Technion Israel Institute of Technology

Boris Koichu
Weizmann Institute of Science

Abstract

This study is aimed at characterization of action strategies in DGE (Cabri 3D), by using a measure of visual difficulty of 2-D sketches depicting 3-D geometric situations (specifically, of cubes with auxiliary structures), as a tool allowing dynamic monitoring of the problem-solving processes. Twenty-one students, seven of high, seven of medium and seven of low spatial ability level, were engaged in DGE-supported solving spatial geometry problems of different visual difficulty levels, during individual work-sessions, immediately followed by semi-structured interviews. The data analysis consisted of identification of changes in the visual difficulty of the sketches undertaken by the students on the computer screen and of their problem-solving moves, as expressed in the interview verbatim. Findings show that learners work with DGS to reduce visual difficulty in a nonlinear process, that is influenced by the individual spatial skills, the initial visual difficulty of the problem, as well as the solution-stage in which the software is introduced. Significant differences in the strategies employed by students of different spatial ability levels, for solving spatial geometry problems, can be explained by differences in the structure of knowledge of experts versus novices. Consequently, these findings have important implications for teaching spatial geometry with DGS.

Keywords: measuring visual difficulty, dragging and measuring modalities in DGE, spatial ability, experts and novices.

תקציר

מטרת מחקר זה לאפיין תהליכים היוריסטיים בסביבת DGE (Cabri 3D), באמצעות שימוש במדד לקושי חזותי של שרטוטים דו-ממדיים המדמים סיטואציות גיאומטריות תלת-ממדיות (של קוביות עם מבני עזר), ככלי המאפשר ניטור דינמי של תהליכי פתרון הבעיות. עשרים ואחד תלמידים בעלי רמות שונות של יכולת מרחבית (שבעה בעלי יכולת מרחבית גבוהה, שבעה בעלי יכולת מרחבית בינונית ושבע בעלי יכולת מרחבית נמוכה), לקחו חלק בסדנאות אינדיבידואליות בהן עסקו בפתרון נתמך-DGE של בעיות בגיאומטריה מרחבית, בדרגות שונות של קושי חזותי, ומיד לאחר מכן השתתפו בראיונות מובנים למחצה. ניתוח הנתונים כלל זיהוי של השינויים בקושי החזותי של השרטוטים אליהם הגיעו התלמידים על גבי מסך המחשב ושל מהלכי פתרון הבעיות שלהם, כפי שבאו לידי ביטוי בראיונות. הממצאים מראים כי הלומדים פועלים עם DGS להפחתת הקושי החזותי, בתהליך לא ליניארי, המושפע על ידי המיומנויות המרחביות של הפרט,

הקושי החזותי ההתחלתי של הבעיה, כמו גם השלב בפתרון הבעיה בו מעורבת התוכנה. הבדלים משמעותיים באסטרטגיות המופעלות על ידי תלמידים ברמות יכולת מרחבית שונות, לפתרון בעיות גיאומטריות מרחביות, ניתנים להסבר באמצעות הבדלים במבנה הידע של מומחים לעומת מתחילים. מתוך כך, יש לממצאים אלו השלכות חשובות להוראה של גיאומטריה במרחב עם DGS.

מילות מפתח: מדידה של קושי חזותי, גרירה ומדידה ב-DGE, יכולת מרחבית, מומחים ומתחילים.

מבוא ומסגרת תיאורטית

תוכנית הלימודים במתמטיקה בישראל כוללת את נושא הגיאומטריה המרחבית בכל רמות הלימוד, במטרה לפתח מיומנויות מרחביות חיוניות אצל התלמידים. אולם, הוראת הגיאומטריה במרחב מלווה בקשיים רבים, הנובעים בין היתר מן הצורך לדמות סיטואציות גיאומטריות תלת-ממדיות מתוך שרטוטים דו-ממדיים (Bakó, 2003; Uttal, Miller & Newcombe, 2013). הישגים גבוהים בגיאומטריה מרחבית בבית הספר התיכון, מיוחסים לעתים קרובות ליכולתו של הלומד "לראות במרחב" ולדמות בעיני רוחו אובייקטים גיאומטריים תלת-ממדיים מתוך השרטוטים הדו-ממדיים המוצגים בפניו (Gutiérrez, 1996). אולם לומדים רבים חסרים יכולות אלו, ולעיתים אף אינם מודעים לאבדן המידע במעבר מתלת-ממד לשרטוט הדו-ממדי, ומצויים תחת האשליה שהשרטוט אכן מייצג נאמנה את האובייקט התלת-ממדי (Parzysz, 1988; Duval, 2005). בקו (Bakó, 2003) מצאה כי לומדים מרבים להסתמך על היבטים וויזואליים בשרטוט, ונוטים להתעלם מהיקשים לוגיים. מתוך כך, סיכמו פררה וממנה (Ferrara & Mammana, 2014) כי לקונפליקט שבין היבטים צורניים וקונספטואליים של סיטואציה גיאומטרית, נוסף במרחב גם קונפליקט עם התפיסה החזותית.

מחקרים רבים מצביעים על היעילות של סביבות תלת-ממדיות דינמיות ממוחשבות (DGE) לקידום תפיסה של מבנים תלת-ממדיים (Christou, Pittalis, Mousoulides & Jones, 2005 Sinclair et. al., 2016; Feng, Spence & Pratt, 2007; Laborde, 2000; Yeh & Nason, 2004). חקר תהליכי הלמידה ב-DGE, העלה הבדלים הקשורים ביכולת המרחבית האינדיבידואלית של הלומדים (Dan & Reiner, 2014; Tuvi-Arad & Gorsky, 2007; Vicente, Hayes & Williges, 1987; Widder & Gorsky, 2012). כך לדוגמה נמצא כי לומדים המתקשים לראות במרחב נוטים לפצות על חוסר היכולת המרחבית שלהם באמצעות שימוש רב בתוכנה. הם פועלים בדפוס קבוע של סיבובים המלווים במדידות מרובות, כנראה בניסיון לגלות רמזים לתכונות גיאומטריות חדשות. כתוצאה מכך, לומדים אלה מבצעים מספר גדול יותר של מדידות ומספר נמוך יותר של סיבובים. לעומתם, לומדים בעלי יכולת מרחבית מפותחת משתמשים פחות בתוכנה באופן יחסי, ומבצעים בעיקר פעולות סיבוב. נראה כי לומדים אלה מסוגלים לתמרן ולסובב אובייקטים תלת-ממדיים בעיני רוחם, ולהעריך מרחקים וזוויות, גם ללא עזרת התוכנה, ולפיכך נוטים להשתמש ב-DGS בעיקר לצורך בקרה עצמית (Widder & Gorsky, 2012). חלק ממחקרים אלו ניסו להסביר את ממצאיהם באמצעות התיאוריה של העומס הקוגניטיבי (CLT), אולם מאחר ולא ידועה שיטה למדידת עומס קגניטיבי, לא זכו הסברים תיאורטיים אלו לתיקוף אמפירי. בנוסף, נראה שהעומס הקוגניטיבי עצמו מהווה רק היבט אחד של הבדל עמוק בהרבה בין בעלי יכולות מרחביות שונות, ואינו עונה לחלוטין על השאלה כיצד אסטרטגיות ספציפיות עוזרות ללומדים בתפיסה המרחבית.

בניסיון לענות על שאלה זו, קישרו חוקרים אחרים ישירות בין סוג הפעולה המבוצעת ב-DGS והתוצאות הקוגניטיביות שלה (Leung, 2003; Or, 2008; Arzarello, Olivero, Paola & Robutti, 2002; Olivero & Robutti, 2007; Leung, 2012). ארזרלו ושותפיו (Arzarello, et al., 2002), ומאוחר יותר גם אוליברו ורובוטי (Olivero & Robutti, 2007), יצאו מתוך ההכרה ששרטוטים גיאומטריים משחקים תפקיד כפול: מצד אחד הם מתייחסים לאובייקטים תיאורטיים, ואילו מצד שני הם מציעים תכונות מרחביות גרפיות, שנועדו לעורר אצל הלומד פעילויות תפיסתיות. הם מתארים את הלמידה עם DGS כאינטראקציה בין תהליכים קוגניטיביים עולים, מהשרטוט לתיאוריה, המאפשרים חקר המצב הגיאומטרי וחיפוש אחר תכונות מוכרות וסדירויות בשרטוט, ובין תהליכים קוגניטיביים יורדים, מן התיאוריה אל השרטוט, המאפשרים אימות או הפרכה של השערות ואינטואיציות. המעבר בין אופנים שונים של חשיבה, מאפשר ללומדים לנוע קדימה ואחורה מהתחום הגרפי של האובייקט הפיגורלי, אל השדה התיאורטי של האובייקט המושגי, וכך להגיע להבנה (Olivero & Robutti, 2007; Arzarello et al., 2002). מחקרים אלו מציעים סיווג היררכי של פרקטיקות גרירה ומדידה ב-DGE, בהתאם לגישות ולמטרות שונות של לומדים החוקרים בעיה גיאומטרית. אל חוקרים אלו, המנסים לבסס מסגרת תיאורטית עבור פעילות הלומדים עם DGE לפתרון בעיות גיאומטריות במישור, הצטרף גם אור (Or, 2008), אשר הרחיב את הסיווג של פעולות הגרירה והמדידה גם למרחב, באופן המתייחס גם לאפשרות

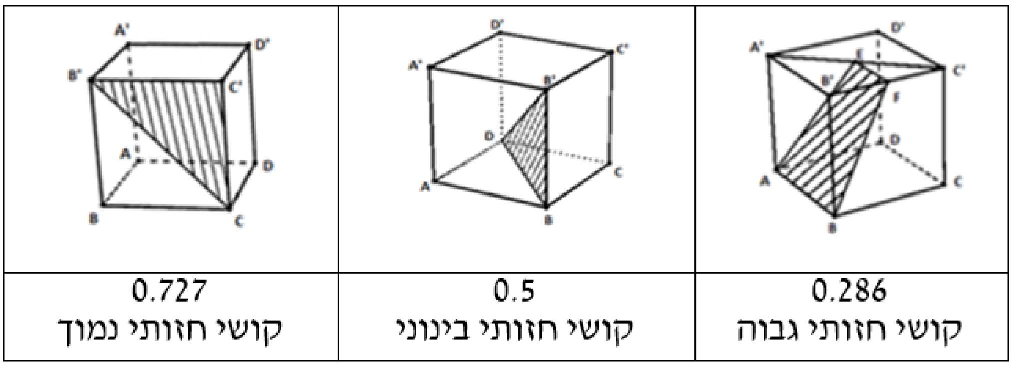
הסיבוב לשינוי נקודת המבט על האובייקט התלת-ממדי. לעומת זאת, לאונג (Leung, 2003, 2008, 2012) קישר בין השינויים החלים על גבי מסך המחשב תוך כדי השימוש ב-DGS, לבין תיאורית הווראציות (Marton & Booth, 1997). לטענתו, על מנת להגיע להבנה מעמיקה של תופעה, צריכים הלומדים להיות מודעים בו-זמנית להיבטים המרובים שלה. התבוננות בשרטוט גיאומטרי סטטי אחד, מקשה על החשיבה, היות וההבחנה בתכונות הגיאומטריות כרוכה בהדמיה מנטלית של השתנות האובייקט מתוך מניפולציות שונות. סביבות גיאומטריות דינמיות (DGE) מספקות מעין מציאות-מדומה שבה ניתן לצפות בשינויים. מתוך כך מציע לאונג (Leung, 2003) סיווג שונה של שיטות גרירה ומדידה ב-DGE, המבוסס על אסטרטגיות מגוונות של הלומד ליצירת וריאציה אשר מובילה להבחנה סימולטנית ברורה בתכונות האובייקט השונות, ומתוך כך להבנה ולמידה. מכל מקום, הסיווג של פעולות הגרירה והמדידה במחקרים אלו, מספק בעיקר כלים תיאורטיים לתאור תהליכי הלמידה ב-DGS, כאשר הצורך להחליט על הכוונות שמאחורי הפעולות המבוצעות ב-DGS, משאיר מקום רב לפרשנויות סובייקטיביות של חוקרים. בנוסף, חסרה כאן ההבחנה בין לומדים בעלי יכולות מרחביות שונות, העושים שימוש באסטרטגיות פעולה שונות ב-DGE. מתוך כך, מחקרים אלו בעיקר מתארים את פעילות הלומדים עם DGS, אולם אינם מספקים הסברים חותכים לגבי האופן בו מצליחים הלומדים לגבור על קשיים חזותיים באמצעות התוכנה.

במחקר זה ביקשנו להגיע להבנה מעמיקה יותר לגבי תהליכים אסטרטגיים של לומדים הניחנים בראייה מרחבית שונה ב-DGE. ראייה מרחבית בהקשר של גיאומטריה במרחב מתייחסת הן לתפיסה החזותית של השרטוטים, והן ליכולת לתפעל דימויים מנטליים של האובייקטים התלת-ממדיים המתוארים בשרטוטים אלו. היות וכך, חשוב להבין את התפקיד שמשחק הקושי החזותי בלמידה עם DGE. יתכן למשל כי, לצד התהליכים הקוגניטיביים המעורבים בפתרון בעיות ב-DGE, לומדים פועלים עם DGS להקלת הקושי החזותי בשרטוט, ומסיבה זו האסטרטגיות המופעלות קשורות בראייה המרחבית האינדיבידואלית של הלומדים. מתוך כך, מטרת מחקר זה הייתה לבחון השערות אלו ולתת מענה לשתי שאלות:

1. האם הלומדים פועלים באמצעות DGS להקלת הקושי החזותי בשרטוטים?
2. מה מאפיין את אסטרטגיות הפעולה של לומדים בעלי יכולת ראייה מרחבית שונה, לפתרון בעיות מרחביות בדרגות קושי חזותי שונה באמצעות DGS?

מתודולוגיה

על מנת לענות על שאלות המחקר, בנינו ותיקפנו מדד לקושי חזותי (מקח"ז) של שרטוטים דו-ממדיים עבור קוביות עם מבני עזר (Widder, Berman & Koichu, 2014). מקח"ז ניתן לחישוב אפריורי, באמצעות התמקדות בשני סוגים של מידע הטמון בשרטוט: מידע העשוי להועיל לתפיסה רצויה של השרטוט, ומידע העלול להטעות ולעכב את התפיסה, וחישוב היחס ביניהם. איור 1 מציג דוגמאות לשרטוטים ברמות קושי חזותי שונות על פי מדד זה.

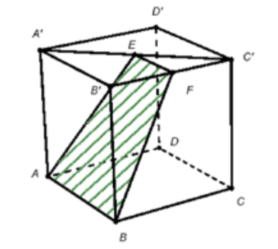


איור 1. שרטוטים של קוביות עם מבני עזר, ברמות קושי חזותי שונות על פי מקח"ז. הקושי החזותי גבוה יותר ככל שמקח"ז נמוך יותר (פחות מידע מסייע ויותר מידע מטעה)

במחקר השתתפו 21 תלמידי כיתה י"ב הלומדים מתמטיקה ברמה של 5 יח"ל: שבעה בעלי יכולת מרחבית נמוכה, שבעה בעלי יכולת מרחבית בינונית ושבעה בעלי יכולת מרחבית גבוהה. היכולת המרחבית נקבעה באמצעות מבחן סטנדרטי PSVT-ROT (Guay, 1976).

כל הנבדקים השתתפו בראיונות חצי-מובנים, במהלכם פתרו שבע בעיות בגיאומטריה במרחב תוך אפשרות להשתמש בתוכנת Cabri 3D. לתלמידים ניתנה בחירה חופשית באם ומתי להיעזר בתוכנה, מתוך רצון לחפש הגיון מאחורי הבחירות והשינויים שהתלמידים עשו בשרטוטים. הבעיות היו ברמות קושי חזותי שונות: 3 בעיות קשות, 2 בינוניות ו-2 קלות (הקושי החזותי נקבע על פי המקח״ז). באיור 2 מובאת כדוגמה אחת מבין שלוש הבעיות הקשות בהן עסקו הלומדים במהלך הראיונות. הראיונות הוקלטו, תומללו ותועדו.

שאלה קשה
קושי חזותי גבוה
מקח״ז 0.286



ABCDA'B'C'D' מייצגת קובייה. נתון כי הנקודה E היא אמצע A'C', והנקודה F היא אמצע B'C'.	א.	הישר AE עובר דרך הנקודה B'.	☐ נכון ☐ לא נכון
	ב.	המרובע ABFE טרפז שווה שוקיים. השוקיים השוות הן __________.	☐ נכון ☐ לא נכון
	ג.	המרובע ABFE הוא טרפז ישר זווית. הזוויות הישרות הן __________.	☐ נכון ☐ לא נכון
	ד.	AE היא הצלע הארוכה ביותר במרובע ABFE.	☐ נכון ☐ לא נכון

איור 2. אחת משלוש הבעיות הקשות בהן עסקו הלומדים במהלך הראיונות

ניתוח הנתונים כלל ניטור סדרתי של השינויים בקושי החזותי של השרטוטים על גבי מסך המחשב, באמצעות חישוב המקח״ז במסכים קריטיים, אשר הוגדרו כמסכים בהם תלמיד עצר את פעילותו למשך שתי שניות או יותר, או כמסכים בהם תלמיד ביצע מדידות (של קטעים או זוויות). לניתור הסדרתי היה שימוש כפול:

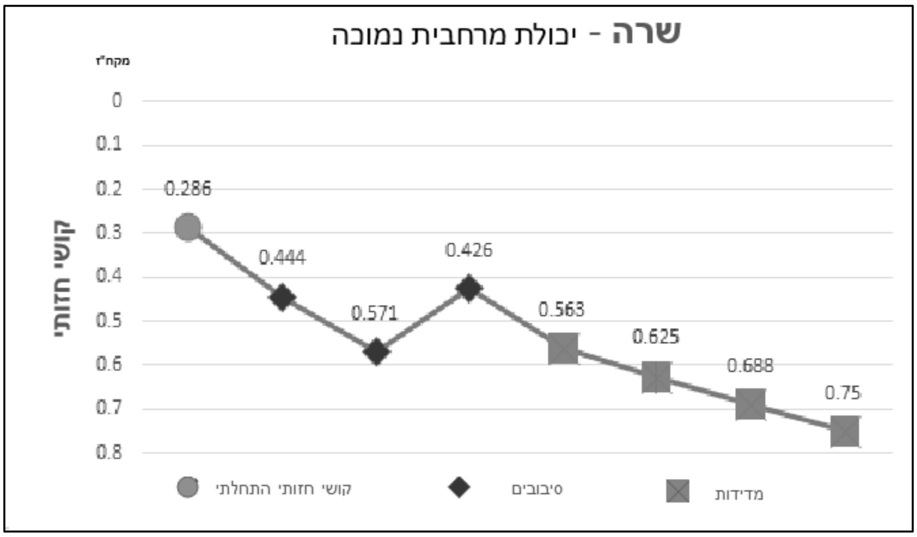
1. לבניית גרף אסטרטגיה (לכל לומד, לכל בעיה), המתאר את סוג הפעולות שהלומד ביצע (סיבובים ומדידות), את ערך המקח״ז בשרטוט שעל גבי מסך המחשב הקריטי בכל פעולה, ואת ההשלכה של ערך זה על הקושי החזותי. בשל היחס ההפוך בין המקח״ז לקושי החזותי בפועל, צויינו ערכי מקח״ז על גבי הגרף בסדר יורד (ראו דוגמה באיור 3). באמצעות גרפים אלו ביקשנו לבחון את ההשערה כי הלומדים פועלים עם DGS להקלת הקושי החזותי;
2. לספירה של מספר הפעולות הכולל מתוך המסכים הקריטיים, ושל סוגי הפעולות (סיבוב ומדידה) שביצעו בעלי יכולות מרחביות שונות לפתרון בבעיות בעלות קושי חזותי שונה. באמצעות ספירה זו ביקשנו לבחון מאפיינים של האסטרטגיות שמפעילים נבדקים בעלי ראייה מרחבית שונה, על פני בעיות בדרגות קושי חזותי שונה.

ממצאים

התבוננות מקרוב בגרף האסטרטגיות של לומדים מאששת את ההשערה כי הם פועלים באמצעות DGS בתהליך לא לינארי להקלת הקושי החזותי, אשר נראה כקשור ליכולת המרחבית האינדיבידואלית של הלומד. נדגים זאת באמצעות גרפי האסטרטגיות של שלושה תלמידים בעלי יכולות מרחביות שונות (שרה, רחל, ובן - השמות בדויים).

המקרה של שרה (יכולת מרחבית נמוכה)

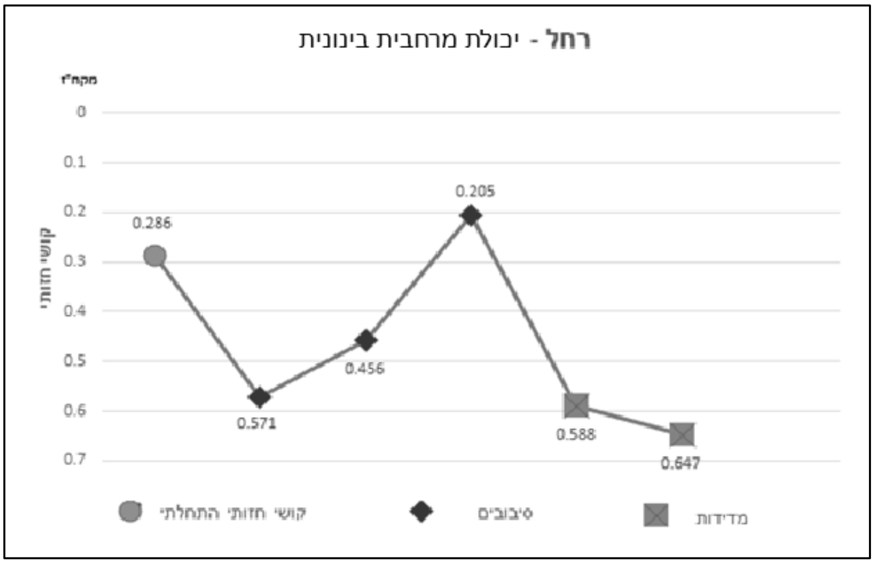
שרה החלה את השימוש בתוכנה כבר בהתחלה, וסובבה את המודל במטרה לבחון את ההשערה כי לא מדובר בטרפז שווה שוקיים, אלא ישר זווית (ראו איור 2). מתוך כך, שרה הייתה ממוקדת אך רק בגילוי תכונותיו של מה שמראש סברה כי הוא טרפז. תוך כדי סיבוב המודל, הגיעה שרה למצב בו הטרפז אכן נראה לה ישר זווית, אולם לא הייתה לגמרי בטוחה בכך, ולכן ביקשה לשנות פרספקטיבה בכדי למדוד. סיבוב שלישי זה שינה את דעתה, משום שהטרפז על המסך נראה לה לפתע שווה שוקיים. שרה תקנה את כל תשובותיה לשאלות בהתאם, דבר המצביע על כך ששרה נסמכה מאד על אספקטים חזותיים, ופחות על הנמקה תיאורטית. גם כשניסתה לחשוב בהגיון ״...טרפז לא יכול להיות גם שווה שוקיים וגם ישר זווית, נכון?!?...״, היא לא הצליחה להחליט מהן התכונות של הטרפז בשרטוט. לבסוף, הגיעה שרה אל התשובה הנכונה באמצעות סדרה של מדידות, שהקלה גם על הקושי החזותי (ראו איור 3). כשנשאלה מה הביא אותה להשערה הראשונית הנכונה שלה, היא אמרה ״...זה משהו שלמדתי בבית הספר – תמיד להתייחס אל הזוויות שסביב קדקוד הקובייה כישרות...״. מתוך כך, נראה כי במהלך הפתרון כולו הייתה שרה ממוקדת בפרטים החזותיים, והצליחה לענות נכון על השאלה, מבלי להגיע להבנה מעמיקה של הסיטואציה הגיאומטרית.



איור 3. גרף האסטרטגיות של שרה כשפתרה את השאלה באיור 2

המקרה של רחל (יכולת מרחבית בינונית)

בניגוד לשרה, רחל החלה את פתרון הבעיה באיור 2 מבלי להשתמש במחשב. אף שהניחה כי אכן מדובר בטרפז, ניכר היה כי רחל נעזרה בהנמקה פורמלית בדרך לפתרון: "...ABFE לא טרפז שווה שוקיים בגלל ש- A'C' הוא אלכסון של בסיס הקובייה, ואילו B'C' הוא מקצוע של הקובייה, והאלכסון גדול ממקצוע הקובייה...מתוך כך המשולשים AA'E ו-BB'F אינם חופפים, ולא יתכן כי AE ישווה ל-BF...". רחל החלה להשתמש בתוכנה רק לאחר שכבר שיערה השערה, בעיקר משום שלא הצליחה להחליט באם זווית ABF היא ישרה. על מנת לפתור את הלבטים שלה, היא החלה בסיבובים מכוונים (ראו איור 4). היות ולא מצאה תמיכה וויזואלית חותכת ב-DGS, חשה רחל בלבול וקושי לקבל את ההנמקה שלה עצמה כהוכחה: "...אין לי מושג לגבי הזווית הישרה, אבל הטרפז נראה לי שווה שוקיים...". את האישור כי מה שחשבה תיאורטית כבר בהתחלה הוא הנכון, קבלה רחל באמצעות מדידות, אשר גם תרמו להורדת הקושי החזותי (ראו איור 4). במקרה של רחל נוכל לומר כי דווקא השימוש בתוכנה יצר בלבול ועיסוק יתר בפרטים הוויזואליים.

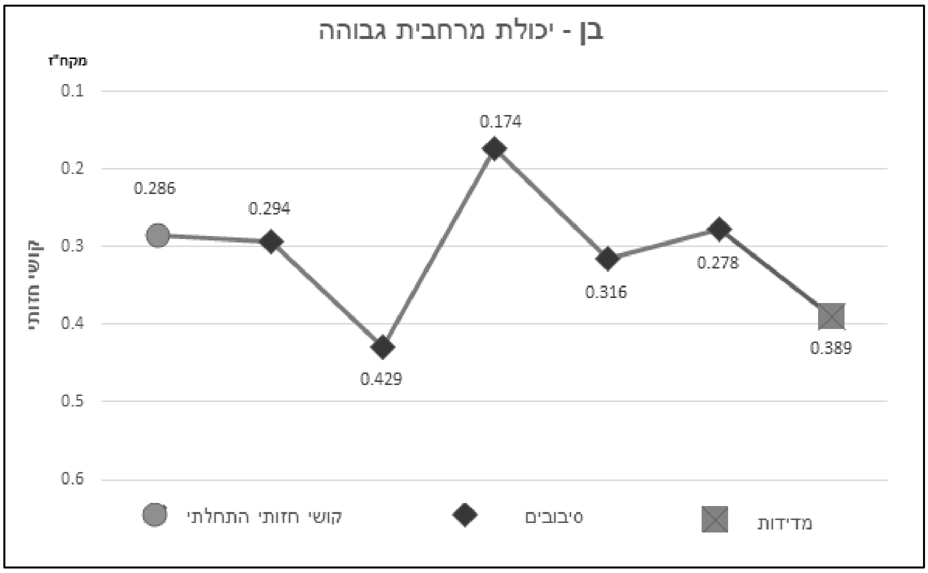


איור 4. גרף האסטרטגיות של רחל כשפתרה את השאלה באיור 2

בניגוד לבעלי היכולות המרחביות הנמוכות והבינוניות, אשר עשו שימוש ב-DGS לפתרון כל הבעיות, בעלי היכולת המרחבית הגבוהה ניסו לרוב להגיע אל הפתרון בכוחות עצמם וניצלו את התוכנה בעיקר לצורך בדיקה עצמית.

המקרה של בן (יכולת מרחבית גבוהה)

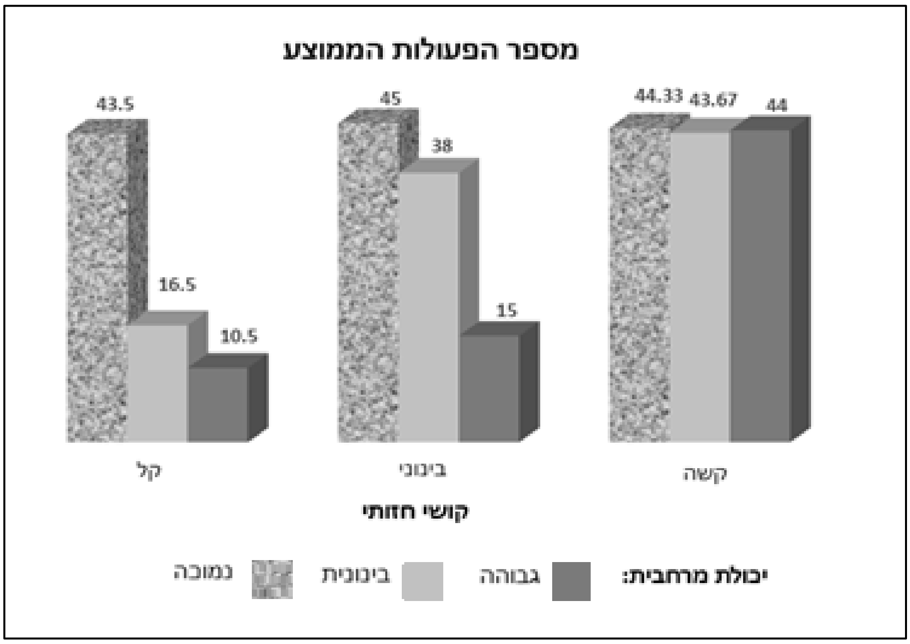
בן פתר תחילה את הבעיה באיור 2 ללא התוכנה, והצליח למצוא הסברים פורמליים לרוב האספקטים הגיאומטריים של הבעיה. בהמשך ביקש בן להשתמש בתוכנה על מנת לתקף את הנימוקים התיאורטיים שלו: "...אני משתמש בתוכנה משום שהיא זמינה...לא בגלל שאיני מסוגל לחשוב על הפתרון בעצמי...זה פשוט נחמד לקבל משוב וזה עוזר לראות את הדברים על המסך במקום רק לדמיין אותם...". בן ערך מספר סיבובים (ראו איור 5). באופן מפתיע, אף שנראה כי הקושי החזותי עלה, סיבובים אלו עזרו לבן לקשר בין השרטוט לתיאוריה ולתקף את ההוכחות אליהן הגיע בכוחות עצמו. יתרה על כן, מתוך התבוננות במסכים המשתנים, גילה בן תכונות גיאומטריות נוספות לגבי זוויות עליהן לא נשאל. למרות שחש מאד בטוח בעצמו, בן הופתע כאשר נשאל מדוע המרובע הוא טרפז. הוא ניסה לענות על שאלה כללית יותר: "...האם שני קווים המונחים על מישורים מקבילים הם בהכרח מקבילים?...". כשלא הצליח למצוא הוכחה לכך בכוחות עצמו, הוא ערך מדידה של זוויות, והוכיח אמפירית שבשרטוט קיימת הקבלה בין EF ו-AB. מיד אחר כך חשב על הוכחה תיאורטית באמצעות משפט קטע אמצעים במשולש A'B'C'. להערכתנו, עצם העיסוק בשאלה כללית, מעידה על הבנה מעמיקה, שהיא מעבר לסיטואציה הגיאומטרית הנתונה. האסטרטגיה המרכזית של בן היתה שימוש בהוכחות דדוקטיביות. לפיכך, לא היה לבן צורך בשינויים משמעותיים בקושי החזותי (ראו איור 5). השינויים הקטנים בקושי החזותי במהלך הפעילות עם DGS, מתארים היטב את החיפוש אחר אימות של בעיות הגיון קטנות בתוך הפתרון המקיף.



איור 5. גרף האסטרטגיות של בן כשפתר את השאלה באיור 2

במבט כללי יותר, מתוך הספירה של הפעולות וסוגן נמצא כי תלמידים הניחנים ביכולת מרחבית גבוהה יותר נטו לבצע פחות פעולות במחשב, ולהיעזר יותר בפעולות סיבוב ופחות במדידות. הציפייה הראשונית הייתה כי, ללא קשר ליכולתם המרחבית, התלמידים יבצעו יותר פעולות ככל שהקושי הוויזואלי של הבעיות יהיה גבוה יותר. בניגוד לציפייה זו, אצל בעלי היכולת המרחבית הנמוכה, השינוי בקושי החזותי לא יצר הבדל משמעותי במספר הפעולות הממוצע, וגם לא במספר היחסי של הסיבובים והמדידות (ראו איור 6). ממצא זה עשוי להצביע על כך שלומדים בעלי יכולת מרחבית נמוכה, הם בבחינת "עיוורים" לסיטואציות גיאומטריות במרחב, ולמעשה אינם מבחינים בין רמות הקושי החזותי השונות של הבעיות במרחב, ומשתמשים באותה האסטרטגיה לפתרון כל הבעיות.

בהלימה עם הציפייה הראשונית, אצל בעלי יכולת מרחבית בינונית וגבוהה, בוצע מספר פעולות ממוצע גדול יותר ככל שהבעיות היו בעלות קושי חזותי גבוה יותר (ר' איור 6). יחד עם זאת, עבור בעלי היכולת המרחבית הבינונית הגידול המשמעותי במספר הפעולות הממוצע היה במעבר בין הבעיות הקלות לקשות, בעוד שאצל בעלי היכולת המרחבית הגבוהה, הגידול המשמעותי נמצא במעבר בין הבעיות הבינוניות לקשות. יתכן והדבר מצביע על כך שבעלי יכולת מרחבית בינונית צריכים להגביר משמעותית את מאמציהם כבר בפתרון בעיות מרחביות בעלות קושי ויזואלי בינוני, ואילו בעלי יכולת מרחבית גבוהה צריכים להגביר את המאמצים באופן משמעותי רק לפתרון בעיות מרחביות בקושי חזותי גבוה.



איור 6. מספר הפעולות הממוצע של בעלי יכולת מרחבית גבוהה ובינונית

באופן מפתיע, עבור השאלות הקשות, לא נמצא הבדל משמעותי במספר הפעולות הממוצע שביצעו תלמידים בעלי רמות יכולת מרחבית שונות (ראו איור 6). ממצאים אלו מקבילים לממצאי מחקרם של צ'ייס וסיימון (Chase & Simon, 1973) בנוגע להבדלים ביצועיים בין מתחילים, בעלי דרגת מומחיות בינונית, ודרגת מומחיות גבוהה במשחק השחמט, אשר הראו ביצועים דומים לפתרון מצב לא מוכר של לוח שחמט. הקבלה זו עשויה להצביע על היותן של סיטואציות גיאומטריות מרחביות בעלות קושי וויזואלי גבוה בבחינת מצבים פחות מוכרים לכלל התלמידים, בהם יכולת הראייה המרחבית אינה בגדר יתרון.

דיון ומסקנות

ניטור השינויים בקושי החזותי במסכי המחשב תוך כדי קיום הראיונות, חשף כי אף שכלל הלומדים פעלו באמצעות התוכנה על מנת לצמצם את הקושי החזותי, תהליך זה לא היה לינארי, אלא הושפע על ידי היכולת המרחבית, הקושי החזותי של הבעיה, והשלב בפתרון הבעיה בו עורבה התוכנה. נראה כי ממצאים אלה קשורים באופן הדוק למסגרת הרב-ממדית לפתרון בעיות אותה מציעים קרלסון ובלום (Carlson and Bloom, 2005), וכוללת ארבעה שלבים מחזוריים: אוריינטציה, תכנון, ביצוע ובדיקה. ההבדל בין הלומדים טמון בעיתוי שלהם לשימוש בתוכנה במהלך פתרון הבעיות, ובמידה בה הם חיזקו את ההשערות שלהם לפני כן: בן השלים את שלבי האוריינטציה, התכנון והביצוע לפני שעירב את התוכנה בשלב הבדיקה. לעומת זאת, שרה ורחל החלו להשתמש בתוכנה כבר במהלך שלב האוריינטציה, וכתוצאה מבלבול שיערו השערות לא נכונות. שלושה מקרים אלה מצביעים על כך שדפוסי השינוי בקושי החזותי קשורים באופן הדוק לדפוסים של פעולות היוריסטיות אותן מבצעים הלומדים לפתרון בעיות בגיאומטריה מרחבית עם DGS. ממצא זה עולה בקנה אחד עם הציפיות שלנו שהמידע החזותי על מסך המחשב ידריך את האסטרטגיות של התלמידים בפתרון בעיות גיאומטריות מרחביות בסביבת DGE.

הממצאים מצביעים על יכולת מרחבית כעל דרגת מומחיות, ולפיכך על הראייה המרחבית כניתנת לשיפור, בשאיפה להגיע לדרגת מומחיות גבוהה יותר. השאלה הנשאלת היא עד כמה ובאיזה אופן ניתן לגייס לכך את השימוש ב-DGS? מחד גיסא, עבור תלמידים בעלי יכולות נמוכות ובינוניות, כמו שרה ורחל, השימוש בתוכנה אינו בהכרח מביא להבנה מעמיקה, ואף מבלבל. מאידך גיסא, תלמידים בעלי יכולת מרחבית גבוהה, כדוגמת בן, ממעטים להשתמש בתוכנה, ובדרך כלל מצליחים לפתור בעיות מרחביות בכוחות עצמם, ולהעביר את השימוש ב-DGS לשלב האחרון של האימות. נראה שקיים מתח בין המציאות המעשית של השימוש ב-DGE בכיתות, ובין מה שמפתחי תוכנה ותומכים אחרים חושבים על השימוש ב-DGS. על מורים וחוקרים כאחד לבחון ביסודיות שאלות מהותיות לגבי האופן בו רצוי לעצב הן את סביבות למידה, והן את ההוראה בהן, על מנת לקדם שינוי קונסטרוקטיבי רצוי בחינוך הגיאומטרי המרחבי.

מקורות

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A Cognitive Analysis of Dragging Practices in Cabri Environments. *ZDM*, 34(3), 66-72.

Bakó, M. (2003). Different projecting methods in teaching spatial geometry. *Electronic Proceedings of the third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*. Retrieved November 8, 2013 from: http://www.erme.tudortmund.de/~erme/CERME3/Groups/TG7/TG7_Bako_cerme3.pdf

Carlson, M., & Bloom, I. (2005). The cyclic nature of problem solving: An emergent multidimensional problem-solving framework. *Educational Studies in Mathematics*, *58*, 45-75.

Chase, W., & Simon, H. (1973). Perception in chess. *Cognitive Psychology*, 4, 55-81.

Christou, C., Pittalis, M., Mousoulides, N., & Jones, K. (2005). Developing 3D dynamic geometry software: Theoretical perspectives on design. In: F. Olivero & R. Sutherland, (eds.), *Visions of mathematics education: Embedding technology in learning*, 69-77. Bristol, UK: University of Bristol.

Dan, A., & Reiner, M. (2014). A comparison in mental load, using EEG in two different learning environments. *Meeting of SAN (Society of Applied Neuroscience) 2014*. Utrecht, Netherlands.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apparentissage de la géométrie: Développement de la visualisation, differenciation des raisonnement et coordination de leurs fonctionnements, *Annales de didactique et sciences cognitives*, *10*, 5-53.

Feng, J., Spence, I., & Pratt, J. (2007). Playing an action video game reduces gender differences in spatial cognition. *Psychological Science*, *18*(10), 850-855.

Ferrara, F., & Mammana, M. F. (2014). Seeing in space is difficult: an approach to 3d geometry through a dge. *Research Report in the Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vancouver, Canada.

Guay, R. B. (1976). *Purdue spatial visualization tests*. Purdue Research Foundation.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. In L. Puig, & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *1*, 3-19. Valencia: Universidad de Valencia.

Laborde, C. (2000). Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1 & 2), 151- 156.

Leung, A. (2003). Dynamic geometry and the Theory of Variation. In: *Proceedings of the 27th Conference of the group Psychology of Mathematics Education*, N. A. Pateman & B. J. Dougherty, J. T. Zilliox (Eds) (Vol3. pp.197-204). Hawaii: CRDG, College of Education, University of Hawaii.

Leung, A. (2008). Dragging in a dynamic geometry environment through the lens of variation. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 13, 135-157.

Leung, A. (2012). Discernment and Reasoning in Dynamic Geometry Environments. In *12th International Congress on Mathematical Education*, *8*.

Marton, F. & Booth, S. (1997). *Learning and Awareness*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, INC, Publishers.

Olivero, F., & Robutti, O. (2007). Measuring in dynamic geometry environments as a tool for conjecturing and proving. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *12*, 135-156.

Or, A. (2008). Designing a Teaching Unit in Cabri 3D Environment for Concepts of 3D Figures in Hong Kong Secondary Mathematics Curriculum. In: *Proceedings of Topic Study Group 22: New Technologies in the Teaching and Learning of Mathematics, 11th International Congress on Mathematical Education*. Monterrey, Mexico, Academic Press.

Parzysz, B. (1988). 'Knowing' vs. 'seeing': Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, *19*, 79-92.

Sinclair, N., Bussi, M. G. B., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A., & Owens, K. (2016). *Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report*. *ZDM*, *48*(5), 691-719.

Tuvi-Arad, I., & Gorsky, P. (2007). New visualization tools for learning molecular symmetry: A preliminary evaluation. *Chemistry Education Research and Practice*, *8*(1), 61-72.

Uttal, D., Miller, D., & Newcombe, N. (2013). Exploring and enhancing spatial thinking: links to achievement in science, technology, engineering, and mathematics? *Current Directions in Psychological Science*, *22*(5), 367-373.

Vicente, K. J., Hayes, B. C., & Williges, R. C. (1987). Assaying and isolating individual differences in searching a hierarchical files system. *Human Factors*, *29*, 349-359.

Widder, M., & Gorsky, P. (2012). How students solve problems in spatial geometry while using a software application for visualizing 3D geometric objects, *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, *32*(1), 557-588.

Widder, M., Berman, A., & Koichu, B. (2014). Dismantling Visual Obstacles to Comprehension of 2-D Sketches Depicting 3-D Objects. *Proceedings of PME 38/ PME-NA 36 Conference: Mathematics Education at the Edge*. Vancouver, Canada. Jul 15-20, 2014.

Yeh, A. & Nason, R. (2004). VR Math: A 3D microworld for learning 3D geometry. In L. Cantoni & C. McLoughlin (Eds.), *Proceedings of World Conference on Educational Multimedia, Hypermedia and Telecommunications 2004* (pp. 2183-2194). Chesapeake, VA: AACE. Retrieved from: http://www.editlib.org/p/12323